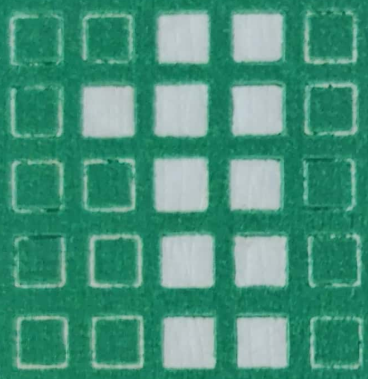
REOLOGIA COMPUȘILOR MACROMOLECULARI



INTRODUCERE ÎN REOLOGIE

R.Z. TUDOSE
T. VOLINTIRU
N. ASANDEI
MARIA LUNGU
ECATERINA MERICA
GH. IVAN

Scanned with OKEN Scanner

RADU Z. TUDOSE
TĂNASE VOLINTIRU
NICOLAE ASANDEI

MARIA LUNGU
ECATERINA MERICĂ
GHEORGHE IVAN

REOLOGIA COMPUȘILOR MACROMOLECULARI

INTRODUCERE ÎN REOLOGIE

Volumul I

Scanned with OKEN Scanner

CUVÎNT INTRODUCTIV

Apariția unei lucrări de *Reologia compușilor macromoleculari* într-o atare viziune și cuprindere reprezintă un eveniment editorial și probează maturitatea la care s-a ajuns în țara noastră în domeniul științei polimerilor. Este cunoscut că pe ansamblu, această ramură modernă a chimiei s-a dezvoltat spectaculos în mai puțin de o jumătate de veac și că s-a diferențiat în discipline bine conturate, la granița cu alte științe. *Reologia*, așa cum se arată și în introducere, aduce servicii tehnicii, se inspiră din matematică, fizică și în special din științele curgerii; în cadrul său se produc acumulări continui de date și fapte, care se cer grupate, sistematizate și aplicate.

Autorii acestei lucrări (în trei volume) s-au angajat la o muncă foarte serioasă, care oferă răspunsuri la o sumă de întrebări fundamentale; ei definesc însuși conceptul de reologie. Primul volum se concentrează asupra problemelor teoretice și operează o mare deschidere pentru celelalte două, care abordează aplicațiile la diferite stări ale compușilor macromoleculari. Sînt de remarcat — în afară de utilitatea neîndoielnică a lucrării — cîteva trăsături ce o recomandă drept operă de referință. Mai întîi aș sublinia faptul că pînă astăzi literatura de specialitate în limba română nu cunoaște o încercare de asemenea proporții. În al doilea rînd, modul original de prezentare și tratare a domeniului atestă că și cele mai sofisticate teze pot fi accesibile și că este posibilă realizarea unei depline armonii între tratarea teoretică și abordarea practică. În al treilea rînd se cere menționat faptul că date fiind interferențele cu alte numeroase teritorii științifice și tehnice, pe de o parte a fost necesară o capacitate de sinteză remarcabilă, iar pe de altă parte realizarea, atingerea, unui echilibru între tratarea pe orizontală a temei și pătrunderea în interiorul diferitelor subramuri explorate.

Scanned with OKEN Scanner

Autorii sînt cunoscuți drept specialiști capabili să realizeze o asemenea armonie între aspectele teoretice ale reologiei și obiect (materialele cu care operează industria), fapt care asigură interesul unui mare grup de cititori din învățămîntul superior, cercetare și producție. De altfel port convingerea că în zilele noastre sectorul compușilor macromoleculari este solicitat mai intens pe acest teritoriu decît în sinteză chimică, că reologia polimerilor a devenit punctul fierbinte al domeniului. Este cert că lucrarea *„Reologia compușilor macromoleculari"* produce o contribuție majoră la progresul științei polimerilor în România, că această lucrare va fi bine primită, că autorii vor beneficia de respectul public pentru curajul și strădania de a fi produs lumină și de a fi deschis orizonturi de înțelegere într-un domeniu de front al științei și tehnicii. Munca lor răspunde exigențelor actuale ale dezvoltării societății românești.

Iași 1982

Acad. prof. dr. doc. CRISTOFOR I. SIMIONESCU

Scanned with OKEN Scanner

PREFAȚĂ

Eforturilor de edificare a unei industrii naționale a compușilor macromoleculari li se adaugă strădaniile unui număr mare de specialiști de a elabora lucrări originale, necesare formării cadrelor solicitate de acest sector industrial. Numeroase tratate, monografii și cursuri abordează problematici vaste referitoare la chimia și tehnologia compușilor macromoleculari, utilajul de sinteză și prelucrare a polimerilor, chimia și tehnologia fibrelor, chimia și tehnologia elastomerilor, fizico-chimia polimerilor, sau lucrări cu tematică mai restrînsă tratează chimia și tehnologia unui polimer sau a unei clase de polimeri, proprietățile fizice și chimice ale polimerilor, tehnologia de prelucrare a unor compuși macromoleculari etc. Unele lucrări înserează în conținutul lor capitole de reologie și folosesc conceptele reologiei în abordarea problemelor prezentate.

Pe plan mondial s-au editat numeroase lucrări de reologie, dintre care cele mai multe se adresează unui număr limitat de specialiști, întrucît se referă la domenii restrînse (polimeri, industrie alimentară, fibre, materiale de construcție etc.), sau sînt corelate cu alte științe. Unele dintre ele, sub titulatura de reologie, abordează mecanica fluidelor nenewtoniene.

Ce este reologia?

Iată o întrebare la care s-au dat numeroase răspunsuri, începînd cu etimologia cuvîntului, urmată de un șir de definiții ce poartă amprenta științelor cu care se interferează și terminînd cu cele elaborate de societățile și congresele de reologie.

Reologia se constituie ca știință la începutul secolului 20 și prin deceniul al cincilea devine „la modă". Este atacată cu perseverență de un număr impresionant de specialiști: chimiști, ingineri constructori, fizicieni, ingineri chimiști, geologi, matematicieni, metalurgiști etc. Fiecare elaborează metode de investigare, modele reologice și încearcă să o definească în limbajul propriei specialități.

Scanned with OKEN Scanner

Modul de abordare a problemelor de reologie este foarte diferit. Maniera cea mai simplă se rezumă la stabilirea, pe cale experimentală, a dependenței între vîscozitate sau modulii de elasticitate și parametrii solicitării. În cealaltă extremă se află teoreticienii care definesc corpuri ipotetice, sau încearcă prin generalizări să stabilească modele pentru o gamă cît mai largă de corpuri.

Cert este faptul că conceptele reologiei au fost folosite în secolele anterioare, cu mult înainte de a se constitui această știință, de către cei ce au pus bazele mecanicii corpului deformabil și a mecanicii fluidelor. Euler, Bernoulli, Hooke, Voigt, Stokes, Navier, ș.a. au folosit ecuații reologice banale și liniare pentru a dezvolta un grup de științe teoretice ce studiază „curgerea" mecanică a materiei. Probabil că decalajul mare în timp între dezvoltarea acestor științe, care au folosit modele reologice liniare, și constituirea reologiei ca știință este cauza excluderii acestor modele, de către unii autori, din conținutul reologiei. De nenumărate ori se întîlnesc afirmații că un anumit corp are comportare reologică, ca și cum ar exista materiale care nu se bucură de o astfel de „proprietate". Desigur, că pentru orice corp, se poate stabili o corelație între solicitare, răspunsul la solicitare și proprietățile acestuia.

Reologia este o ramură a mecanicii continuului. Instrumentul de bază ce caracterizează reologia este conceptul de model reologic, cu alte cuvinte, expresia matematică între solicitare, răspuns și proprietate. Limbajul matematic este calculul tensorial.

Autorii au elaborat o lucrare de nivel superior care, deși se adresează inginerilor chimiști și chimiștilor, este accesibilă unui cerc mai larg de specialiști. Ea a fost scrisă în condițiile în care, corespunzător nivelului actual, trebuie folosit calculul tensorial mai puțin accesibil inginerului chimist, în condițiile în care se definesc numeroase corpuri ipotetice, terminologia este incompletă, iar literatura conține numeroase confuzii și afirmații contradictorii.

Cu dorința de a nivela drumul către adevăr, de a aduce unele contribuții în acest sens, dar fără pretenția de a aborda și elucida întreaga problematică a acestei științe, autorii s-au străduit să sistematizeze un material util tuturor celor ce își desfășoară activitatea în sfera ingineriei chimice. În acest scop s-a făcut uz, într-o mai mică măsură, de calculul tensorial, s-a folosit modelarea analogică, mai puțin modernă dar foarte intuitivă, s-au explicat mecanismele responsabile de o anumită comportare și s-au prezentat modelele reologice.

Lucrarea are șaisprezece capitole sistematizate în trei volume. Primul volum are caracter general și cuprinde noțiunile de bază ale reologiei, clasificarea comportărilor reologice, modele matematice și se încheie cu cîteva aplicații la mecanica fluidelor. Volumul al doilea tratează reologia stărilor lichide specifice compușilor macromoleculari: soluții și topituri

Scanned with OKEN Scanner

de polimeri, emulsii, suspensii și latexuri. În al treilea volum, referitor la starea solidă, se abordează reologia materialelor plastice, a fibrelor sintetice și a cauciucului.

Contribuția autorilor la elaborarea lucrării s-a realizat, după cum urmează:

— *Radu Z. Tudose*	*capitolele 1—8;*
— *Tănase Volintiru*	*capitolul 14;*
— *Nicolae Asandei*	*capitolele 15 și 16;*
— *Maria Lungu*	*capitolele 9 și 10;*
— *Ecaterina Merică*	*capitolele 11 și 12;*
— *Gheorghe Ivan*	*capitolul 13.*

Reologia compușilor macromoleculari constituie o primă străduință de a sistematiza o parte din bogata literatură existentă pe plan mondial, pentru a veni în sprijinul celor ce deservesc industria, învățământul și cercetarea din domeniul polimerilor. Desigur, că în condițiile perfecționării învățământului de inginerie chimică și a exploziei informațiilor, se vor găsi și alți specialiști care, în viitor, vor duce mai departe acest prim început.

AUTORII

Scanned with OKEN Scanner

CUPRINS

Cuvînt introductiv 3

Prefață 5

1. OBIECTUL, NOȚIUNILE ȘI CONCEPTELE DE BAZĂ ALE REOLOGIEI .. 13

1.1. Introducere 13
1.2. Noțiunile și conceptele de bază ale reologiei 16

1.2.1. Tipuri de solicitări și parametrii solicitării 16
1.2.1.1. Tensiunea 17
1.2.1.2. Deformația 22
1.2.1.3. Viteză de deformare 28

1.2.2. Relații între tensiune și deformație sau viteză de deformare 32
1.2.2.1. Coeficienții lui Lamé 32
1.2.2.2. Modulul lui Young 33
1.2.2.3. Coeficientul lui Poisson 33
1.2.2.4. Modulul de elasticitate la forfecare 34
1.2.2.5. Modulul de elasticitate la compresie 34
1.2.2.6. Relații între coeficienții de material 34
1.2.2.7. Coeficienții de vîscozitate 35
1.2.2.8. Prag de tensiune 36

1.2.3. Fluaj și relaxare 37

1.3. Mecanica continuului 38

1.3.1. Ecuații de conservare 41
1.3.1.1. Ecuația continuității 41
1.3.1.2. Ecuațiile impulsului 42
1.3.1.3. Ecuația momentului impulsului 46
1.3.1.4. Ecuația energiei 47

1.3.2. Ramurile mecanicii continuului 51
1.3.2.1. Mecanica fluidelor 52
1.3.2.2. Mecanica corpului elastic 58
1.3.2.3. Mecanica corpului plastic 62

Scanned with OKEN Scanner

1.4. Mecanica moleculară 63
1.5. Reologia și științele adiacente 65
1.5.1. Științele adiacente 66
1.5.2. Obiectul reologiei 67

Bibliografie 70

2. CORPURI CU PROPRIETĂȚI UNITARE 72

2.1. Introducere 72
2.2. Fluidul lui Newton 73
2.3. Solidul lui Hooke 80
2.4. Plasticul lui St. Venant 85

Bibliografie 90

3. MODELE ANALOGE 91

3.1. Introducere 91
3.2. Modele mecanice 92
3.2.1. Descrierea modelelor 92
3.2.1.1. Modelul lichidului lui Newton 93
3.2.1.2. Modelul solidului lui Hooke 94
3.2.1.3. Modelul plasticului lui St. Venant 95
3.2.1.4. Alte modele 96
3.2.2. Gruparea elementelor în modele 97
3.2.3. Exemple de modele
3.2.3.1. Modele liniare 98
3.2.3.2. Modele neliniare 105
3.3. Modele electrice 108

Bibliografie 111

4. FLUIDE VÎSCOASE CU COMPORTARE NENEWTONIANĂ 112

4.1. Introducere 112
4.2. Fluide nenewtoniene independente de timp 113
4.2.1. Fluide pseudoplastice 114
4.2.2. Fluide dilatante 117
4.2.3. Ecuații reologice 119
4.2.3.1. Legea puterii 120
4.2.3.2. Modelul Prandtl-Eyring 122
4.2.3.3. Modelul Powell-Eyring 123
4.2.3.4. Modelul Ellis 124
4.2.3.5. Modelul Reiner-Philippoff 125
4.2.3.6. Alte modele 126
4.3. Fluide nenewtoniene dependente de timp 131
4.3.1. Fluide tixotrope 132
4.3.2. Fluide reopexice 138
4.4. Reprezentarea generalizată a comportării reologice a fluidelor nenewtoniene 141

Bibliografie 144

Scanned with OKEN Scanner

5. CORPURI VÎSCOELASTICE 145

5.1. Introducere 145
5.2. Efecte specifice corpurilor vîscoelastice 147

5.2.1. Efectul de ridicare pe tijă 147
5.2.2. Umflarea jetului 150
5.2.3. Curgerea instabilă 155
5.2.4. Efectul Uebler 158
5.2.5. Alte efecte 159

5.3. Solicitări periodice 161
5.4. Ecuații reologice sau constitutive 166

5.4.1. Modele analoge mecanice 167

5.4.1.1. Corpul Maxwell 167
5.4.1.2. Corpul Voigt-Kelvin 172
5.4.1.3. Corpul Lethersich 176
5.4.1.4. Corpul Zener 178
5.4.1.5. Modele mecanice cu mai multe elemente 181
5.4.1.6. Alte modele mecanice 182
5.4.1.7. Unele generalizări 183

5.4.2. Modele reologice 186

5.4.2.1. Funcții sau coeficienți de material 186
5.4.2.2. Modele 198

Bibliografie 209

6. CORPURI VÎSCOPLASTICE 212

6.1. Introducere 212
6.2. Efecte specifice corpurilor vîscoplastice 213

6.2.1. Curgerea cu miez piston 214
6.2.2. Efectul σ 216

6.3. Ecuații reologice sau constitutive 217

6.3.1. Modele analoge mecanice 217
6.3.2. Modele reologice 219

Bibliografie 223

7. CORPURI ELASTOPLASTICE 224

7.1. Introducere 224
7.2. Efecte specifice corpurilor elastoplastice 226

7.2.1. Efectul Bauschinger 226
7.2.2. Efectul Poynting 227

7.3. Ecuații reologice sau constitutive 228

Bibliografie 233

Scanned with OKEN Scanner

8. APLICAŢII ALE REOLOGIEI 234

8.1. Introducere 234
8.2. Curgerea izotermă 234

8.2.1. Zona de intrare 236
8.2.2. Zona curgerii stabilizate 239
8.2.3. Zona de ieşire 247

8.3. Curgerea neizotermă 247

Bibliografie 251

Scanned with OKEN Scanner

1

OBIECTUL, NOȚIUNILE ȘI CONCEPTELE DE BAZĂ ALE REOLOGIEI

1.1. INTRODUCERE

Industria chimică sintetizează și prelucrează o gamă largă de substanțe. Metodele și tehnicile folosite pentru realizarea ansamblului de operații ce formează un proces tehnologic, depind într-o foarte mare măsură de proprietăți, printre care răspunsul corpurilor la diverse tipuri de solicitări. Varietatea mare de substanțe cu proprietăți diferite, n-a permis stabilirea unor relații generale care să descrie comportarea fizică sau chimică a acestora în diverse condiții. Pentru unele materiale s-au elaborat ecuații ce descriu un grup limitat de comportări sau, de cele mai multe ori, o singură comportare.

În practica industrială prezintă interes comportarea corpurilor supuse la solicitări mecanice externe, dintre care, pentru ingineria chimică o deosebită importanță o are curgerea fluidelor. Cu studiul solicitărilor și a răspunsului corpurilor la solicitări se ocupă *reologia*. Această știință stabilește modelele matematice care formează funcția răspuns a unui corp supus la solicitări.

O forță sau un sistem de forțe aplicat unui corp conduce la *mișcarea* acestuia. Mișcarea corpului poate consta din *deplasări* sau (și) *deformări*. În general, deplasarea nu modifică poziția relativă a elementelor ce formează corpul, dar modifică poziția acestuia, în raport cu un sistem de referință exterior. Ea constă din *translația* sau (și) *rotația* corpului. În alte condiții, prin aplicarea unei forțe, sau a unui sistem de forțe, corpul poate fi deformat, ceea ce determină modificarea poziției relative a elementelor constituiente. Un corp este deformat atunci cînd, sub acțiunea solicitărilor se modifică *forma* sau (și) *volumul*. Deformarea în cazul solidelor are loc pînă la atingerea echilibrului între

Scanned with OKEN Scanner

forțele externe și interne, în timp ce fluidele, prin aplicarea unei forțe anizotrope și neomogene, nu ajunge la o deformație de echilibru. Gradul de deformare se schimbă continuu în timp. Deformația a cărei valoare crește continuu și nu se mai recuperează după îndepărtarea forței se numește *curgere*.

Fluidele opun rezistențe mici la deformare, iar forțele de frecare internă, ce iau naștere în timpul curgerii, diminuează viteza de deformare. Sub acțiunea unei forțe, viteza de deformare a fluidelor crește pînă se stabilește echilibrul cu forța de frecare, după care viteza de deformare rămîne constantă.

Solidele, sub acțiunea solicitărilor, se pot deforma pînă la atingerea echilibrului între forțele externe și interne, iar după îndepărtarea forțelor deformația se recuperează. Proprietatea corpurilor solide de a recupera deformația, după suprimarea solicitărilor externe, se numește *elasticitate*. Proprietatea fluidelor de a opune rezistență la schimbarea ireversibilă a poziției elementelor de volum constituente și de a disipa energia mecanică sub formă de căldură, se numește *viscozitate*. Deci, corpurile posedă două proprietăți intrinseci, fundamentale: elasticitatea și vîscozitatea. Elasticitatea este o proprietate specifică corpurilor solide, iar vîscozitatea este o proprietate a corpurilor fluide.

Foarte puține materiale naturale sau sintetice posedă numai o singură proprietate. Astfel, cele mai multe soluții și topituri de polimeri, curg sub acțiunea unei solicitări, întrucît posedă viscozitate. După îndepărtarea solicitării o parte mică din deformație se recuperează. Aceste corpuri lichide nu disipează întreaga energie de deformare, întrucît posedă atributul unui solid, elasticitate. Dar și solidele se deformează ireversibil dacă o forță suficient de mare acționează un timp îndelungat. Această „curgere" este denumită *fluaj*. Rezultă că solidele nu sînt numai elastice; ele posedă și „viscozitate". Toate corpurile la care componenta elastică și componenta viscoasă *se manifestă concomitent* se numesc *viscoelastice* sau *elastoviscoase* *).

Între răspunsurile extreme — deformație elastică și curgere — există un spectru larg de comportări, dintre care o deosebită importanță prezintă comportarea plastică. La un corp viscoelastic, sub acțiunea forfecării, proprietățile de elasticitate și viscozitate se manifestă concomitent în toată masa. Atunci cînd elasticitatea și viscozitatea *se manifestă succesiv*, la o solicitare continuu crescătoare, corpul se numește *plastic*. Corpul plastic sub acțiunea unei forțe va curge ca un fluid, dacă forța aplicată depășește o valoare critică, altfel compor-

---

* Se obișnuiește ca proprietatea predominantă să fie pusă la începutul cuvîntului ce definește comportarea. De exemplu, un lichid ce posedă o componentă elastică se va numi viscoelastic.

Scanned with OKEN Scanner

tîndu-se ca un solid. Toate corpurile plastice sînt elastice sau rigide în domeniul solicitărilor mici, ceea ce corespunde unei stări solide. Peste valoarea critică a solicitării, apare curgerea viscoasă, deformația este nerecuperabilă și comportarea este specifică stării lichide.

La corpurile plastice elasticitatea și viscozitatea se manifestă simultan, dar la valori mici ale solicitării, se manifestă preponderent elasticitatea; peste valoarea critică devine dominantă viscozitatea. Lichidele pur viscoase, la tensiune constantă, prezintă deformații nerecuperabile de orice valoare, funcție de timpul de solicitare, pe cînd solidele, peste limita de elasticitate, se deformează nerecuperabil cu viteză continuu descrescătoare.

Plasticitatea nu este o proprietate intrinsecă a corpurilor, ci un mod caracteristic de comportare al acestora. Practic, este considerată a treia proprietate reologică a corpurilor deformabile, iar *reologia studiază comportarea corpurilor care posedă cel puțin una din următoarele proprietăți: elasticitate, plasticitate sau viscozitate.*

În limbaj reologic, toate corpurile „curg", indiferent de starea lor de agregare. Conceptele de stare solidă, lichidă și gazoasă sînt tranzitorii. Reologia nu face o separație netă între cele trei stări de agregare, întrucît trecerea de la o stare la alta presupune o schimbare cantitativă a raportului între componenta elastică și viscoasă. Starea gazoasă poate fi considerată o stare lichidă cu viscozitate mică. Stările de agregare solidă, lichidă și gazoasă pot fi privite ca aspecte ale unei stări fluide generalizate. Principiul generalizării are la bază faptul că atributul esențial al stării lichide — viscozitatea — există și la starea gazoasă și, nedemonstrat, la starea solidă [9].

Răspunsul corpurilor la solicitări mecanice constituie preocuparea de bază a reologiei. Funcție de proprietățile corpurilor răspunsul poate fi:

— neelastic (rigid) — deformația este egală cu zero;
— perfect elastic — deformație temporară, recuperabilă;
— pur viscos — deformație permanentă, nerecuperabilă;
— simultan elastic și viscos — deformație parțial temporară, parțial permanentă;
— succesiv elastic și viscos — deformație temporară sau (și) permanentă;
— nevîscoasă — deformație permanentă pentru solicitarea egală cu zero.

Primul și ultimul răspuns sînt caracteristice pentru două corpuri ipotetice ideale: *solidul lui Euclid* și, respectiv, *lichidul lui Pascal.*

Curgerea este un proces cheie în majoritatea operațiilor specifice tehnologiilor de sinteză și prelucrarea compușilor macromoleculari. Apelul la reologie este indispensabil, dată fiind contribuția acesteia la elucidarea comportării în curgere a diverselor sisteme formate din compuși

Scanned with OKEN Scanner

macromoleculari. Din acest punct de vedere interesează următoarele patru sisteme:

— solide (materiale plastice, cauciuc și fibre);
— topituri de polimeri;
— soluții de polimeri;
— dispersii (emulsii, suspensii și latexuri).

Problemele teoretice ale reologiei, ca și comportarea reologică a corpurilor ce se încadrează în sistemele enumerate mai sus, formează obiectul prezentei lucrări.

1.2. NOȚIUNILE ȘI CONCEPTELE DE BAZĂ ALE REOLOGIEI

Reologia studiază deformarea corpurilor, incluzînd și curgerea. Astfel de efecte sînt provocate de forțe sau sisteme de forțe. Mărimile principale care dau informații cantitative asupra efectelor provocate de forțe sînt *deformația specifică* și *viteza de deformare*. Descrierea cantitativă a procesului de deformare se face cu ajutorul unor ecuații care leagă forțele de proprietățile corpurilor și de mărimea efectelor provocate.

1.2.1. TIPURI DE SOLICITĂRI ȘI PARAMETRII SOLICITĂRII

Se consideră un corp care, un timp foarte îndelungat nu a suferit acțiunea unei forțe externe, încît forma și dimensiunile sale au rămas invariabile. Dacă o forță sau un sistem de forțe va acționa asupra corpului, se zice că este *solicitat*. Forțele care acționează se numesc *solicitări*. Totalitatea solicitărilor formează starea de solicitare sau *starea de tensiune* a corpului.

Asupra unui corp pot acționa forțe exterioare, concentrate sau repartizate, forțe sau momente volumice, forțe de inerție, forțe centrifugale, sarcini produse de un cîmp termic, electromagnetic sau de radiații radioactive, etc. Ansamblul forțelor aplicate unui corp îl pot solicita la *tracțiune, compresie, forfecare, torsiune și încovoiere*. Din punct de vedere reologic, primele trei tipuri de solicitări sînt de o deosebită importanță, iar forfecarea stă la baza curgerii fluidelor.

În continuare vor fi prezentate parametrii solicitării, care includ: tensiunea (efortul unitar), deformația și viteza de deformare.

Scanned with OKEN Scanner

1.2.1.1. TENSIUNEA

Se consideră un corp cu suprafața A, asupra căreia acționează o forță F, uniform distribuită. Raportul F/A definește *efortul unitar*. Limita raportului, cînd suprafața tinde către zero, reprezintă efortul unitar într-un punct și poartă denumirea de tensiune. A cunoaște *starea de tensiune* în vecinătatea unui punct înseamnă a cunoaște tensiunile ce acționează pe toate elementele de suprafață ce trec prin acel punct.

Se va numi *tensiune internă* sau *tensiune proprie* starea unui corp tensionat care nu este solicitat din exterior.

Tensiunea de încărcare sau, simplu, *încărcare* și *tensiunea de descărcare* sau *descărcare* reprezintă creșterea monotonă respectiv descreșterea monotonă a unei solicitări externe.

Într-un sistem de coordonate carteziene rectangulare un tensor este definit printr-o dispunere a unui număr de componente scalare și, cu ajutorul unei legi de transformare, pentru fiecare tip de tensor; componentele scalare pot fi calculate într-un alt sistem de coordonate.

Scalarul este un tensor de ordin zero, determinat în toate sistemele de coordonate de o singură componentă. Masa unui corp este determinată de o singură componentă scalară:

$$M = (M_i) \qquad i = 1 \tag{1.1}$$

Vectorul este un tensor de ordinul unu definit în coordonate rectangulare carteziene pe trei componente scalare. De exemplu, vectorul vitezei:

$$\mathbf{v} = (v_1\ v_2\ v_3) = (v_i) \qquad i = 1,2,3 \tag{1.2}$$

Se consideră un vector $\mathbf{v}$ ale cărui componente, într-un sistem de coordonate rectangulare carteziene, sînt v_1, v_2 și v_3 ((figura 1.1). Vectorul $\mathbf{v}$ este caracterizat de *mărimea*

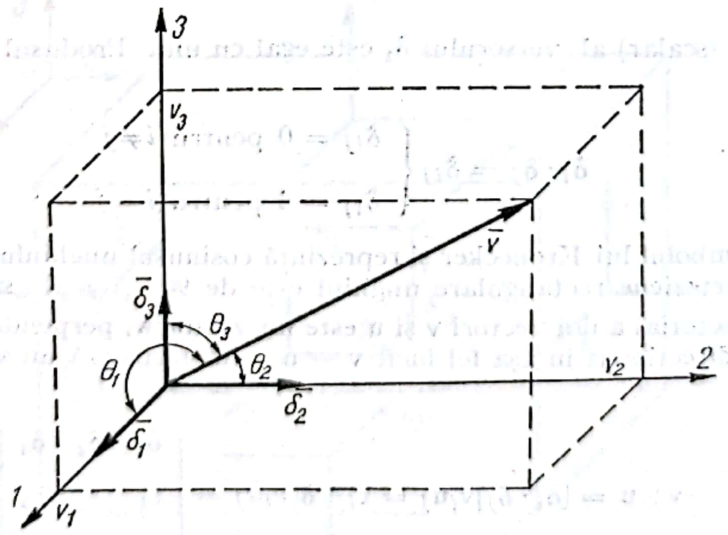


Fig. 1.1. Componentele și versorii vectorului v într-un sistem de coordonate rectangulare.

sau modulul v, de *direcție și de sens*. Valorile componentelor scalare sînt date de expresiile:

$$\begin{aligned} v_1 &= v \cos \theta_1 \\ v_2 &= v \cos \theta_2 \\ v_3 &= v \cos \theta_3 \end{aligned} \tag{1.3}$$

în care θ_1, θ_2 și θ_3 sînt unghiurile ce le formează vectorul v cu cele trei axe de coordonate, iar cosinusurile unghiurilor poartă denumirea de *cosinusuri directoare*, întrucît determină direcția vectorului. Mărimea sau modulul vectorului va fi:

$$v = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2} \tag{1.4}$$

Produsul unui vector v cu un scalar a este un nou vector u:

$$a \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u} \tag{1.5}$$

Se consideră scalarul $(v)^{-1}$ care reprezintă inversul modulului vectorului v. Produsul

$$\boldsymbol{\delta} = v^{-1} \cdot \mathbf{v} \tag{1.6}$$

reprezintă un vector unitar, denumit și versor, ce determină direcția vectorului v (vezi fig. 1.1). Cu ajutorul versorilor se scrie sub formă de sumă expresia vectorului:

$$\mathbf{v} = v_1 \cdot \boldsymbol{\delta}_1 + v_2 \cdot \boldsymbol{\delta}_2 + v_3 \boldsymbol{\delta}_3 \tag{1.7}$$

Produsul scalar a doi vectori reprezintă un scalar:

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{u} = v \cdot u \cos \theta \tag{1.8}$$

format din produsul între modulii vectorilor și cosinusul unghiului dintre ei.

Componenta v_1 a vectorului v, conform figurii 1.1, se poate scrie:

$$v_1 = \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\delta}_1 = v \cos \theta_1 \tag{1.9}$$

deoarece modulul (scalar) al versorului δ_1 este egal cu unu. Produsul scalar a doi versori va fi:

$$\boldsymbol{\delta}_i \cdot \boldsymbol{\delta}_j = \delta_{ij} \begin{cases} \delta_{ij} = 0 \text{ pentru } i \neq j \\ \delta_{ij} = 1 \text{ pentru } i = j \end{cases} \tag{1.10}$$

în care δ_{ij} este simbolul lui Kronecker și reprezintă cosinusul unghiului format de versori. În coordonate carteziene rectangulare unghiul este de 90° ($i \neq j$) sau de 0° ($i = j$).

Produsul vectorial a doi vectori v și u este un vector w, perpendicular la planul format de v și u și direcționat în așa fel încît v — u — w formează un sistem orientat spre dreapta

$$\mathbf{v} \times \mathbf{u} = [\boldsymbol{\delta}_i \cdot \boldsymbol{\delta}_j] v_i u_j = \varepsilon_{ijk} \boldsymbol{\delta}_k v_i u_j = \begin{vmatrix} \boldsymbol{\delta}_1 & \boldsymbol{\delta}_2 & \boldsymbol{\delta}_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \end{vmatrix} \tag{1.11}$$

în care ε_{ijk} este *simbolul de permutare*.

Scanned with OKEN Scanner

Cele nouă produse ale vectorilor unitari se scriu în formă restrînsă astfel:

$$\boldsymbol{\delta}_i \times \boldsymbol{\delta}_j = \varepsilon_{ijk}\boldsymbol{\delta}_k \begin{cases} \varepsilon_{ijk} = 1 \text{ pentru } ijk = 123,\ 231,\ 312 \\ \varepsilon_{ijk} = 0 \text{ pentru doi indici identici} \\ \varepsilon_{ijk} = -1 \text{ pentru } ijk = 321,\ 132,\ 213 \end{cases} \tag{1.12}$$

Produsul tensorial a doi vectori este un tensor de ordinul doi. Dacă se consideră doi vectori unitari $\boldsymbol{\delta}_i$ și $\boldsymbol{\delta}_j$, al căror produs scalar este dat de (1.10) și cel vectorial de (1.12), produsul lor tensorial va fi un tensor unitar

$$\boldsymbol{\delta} = \boldsymbol{\delta}_i \cdot \boldsymbol{\delta}_j \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_{ij} \tag{1.13}$$

Conform ecuației (1.7) vectorul a fost definit prin produsul scalar dintre un vector unitar și un scalar. Tensorul de ordinul doi se definește prin produsul tensorial între un vector și un tensor unitar

$$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\delta}_1 \cdot \boldsymbol{\tau}_1 + \boldsymbol{\delta}_2 \cdot \boldsymbol{\tau}_2 + \boldsymbol{\delta}_3 \cdot \boldsymbol{\tau}_3 \tag{1.14}$$

în care $\boldsymbol{\tau}_i$ sînt vectori ce pot fi descompuși conform ecuației (1.7) și se obține:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\tau} = {} & \boldsymbol{\delta}_1 \cdot \boldsymbol{\delta}_1 \cdot \tau_{11} + \boldsymbol{\delta}_1 \cdot \boldsymbol{\delta}_2 \cdot \tau_{12} + \boldsymbol{\delta}_1 \cdot \boldsymbol{\delta}_3 \cdot \tau_{13} + \\ & + \boldsymbol{\delta}_2 \cdot \boldsymbol{\delta}_1 \cdot \tau_{21} + \boldsymbol{\delta}_2 \cdot \boldsymbol{\delta}_2 \cdot \tau_{22} + \boldsymbol{\delta}_2 \cdot \boldsymbol{\delta}_3 \cdot \tau_{23} + \\ & + \boldsymbol{\delta}_3 \cdot \boldsymbol{\delta}_1 \cdot \tau_{31} + \boldsymbol{\delta}_3 \cdot \boldsymbol{\delta}_2 \cdot \tau_{32} + \boldsymbol{\delta}_3 \cdot \boldsymbol{\delta}_3 \cdot \tau_{33} \end{aligned} \tag{1.15}$$

În ultima ecuație τ_{ij} sînt mărimi scalare, iar produsul tensorial $\boldsymbol{\delta}_i \cdot \boldsymbol{\delta}_j$ reprezintă tensori unitari.

Pe fețele unui paralelipiped pot acționa optsprezece componente ale tensiunii, orientate pe direcțiile axelor de coordonate, (fig. 1.2). Întrucît componentele ce acționează pe fețele opuse sînt identice, starea de tensiune este definită de nouă componente.

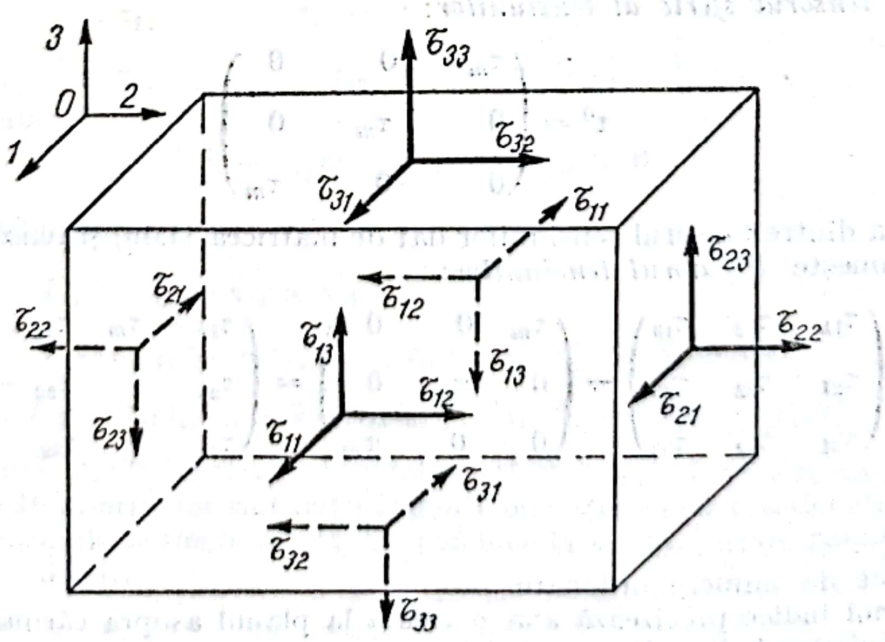


Fig. 1.2. Tensiunile tangențiale și normale.

Tensorul tensiunilor τ este de ordinul doi, are nouă componente τ_{ji} și se reprezintă printr-o matrice *:

$$\tau = \tau_{ij} = \begin{pmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{21} & \tau_{22} & \tau_{23} \\ \tau_{31} & \tau_{32} & \tau_{33} \end{pmatrix} \quad ij = 1,\ 2,\ 3 \tag{1.16}$$

Pe fiecare față acționează două *tensiuni tangențiale* (cu indici diferiți) și o *tensiune normală* (cu indici identici) **. Dacă trei perechi de tensiuni tangențiale sînt egale $\tau_{ij} = \tau_{ji}$, atunci tensorul τ este *simetric*, iar cînd $\tau_{ij} = -\tau_{ji}$, tensorul este *antisimetric*.

Orice tensor de ordinul doi se poate exprima ca suma dintre tensorul simetric și tensorul antisimetric:

$$\tau = \frac{1}{2}(\tau + \tau^*) + \frac{1}{2}(\tau^* - \tau^*) \tag{1.17}$$

în care τ^* este tensorul transpus, rezultat prin schimbarea coloanelor și rîndurilor la tensorul τ. Primul termen din dreapta reprezintă tensorul simetric, iar cel de al doilea tensorul antisimetric.

S-a demonstrat că pentru un tensor simetric τ, a cărui reprezentare matriceală este dată de (1.16), există un alt sistem de axe de referință 1''2''3'' pentru care tensorul are forma:

$$\tau = \begin{pmatrix} \tau''_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \tau''_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \tau''_{33} \end{pmatrix} \tag{1.18}$$

Matricea (1.18) este forma diagonală a matricei (1.16), noile axe de coordonate se numesc *axe principale*, iar tensiunile τ''_{11}, τ''_{22} și τ''_{33} se numesc *tensiuni normale principale*. Cînd tensorul tensiunilor este exprimat prin tensiunile normale medii, atunci el poartă denumirea de *tensorul sferic al tensiunilor*:

$$\tau^0 = \begin{pmatrix} \tau_m & 0 & 0 \\ 0 & \tau_m & 0 \\ 0 & 0 & \tau_m \end{pmatrix} \tag{1.19}$$

Diferența dintre tensorul tensiunilor dat de matricea (1.16) și tensorul sferic al tensiunilor se numește *deviatorul tensiunilor*:

$$\tau' = \tau - \tau^0 = \begin{pmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{21} & \tau_{22} & \tau_{23} \\ \tau_{31} & \tau_{32} & \tau_{33} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \tau_m & 0 & 0 \\ 0 & \tau_m & 0 \\ 0 & 0 & \tau_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tau_{11} - \tau_m & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{21} & \tau_{22} - \tau_m & \tau_{23} \\ \tau_{31} & \tau_{32} & \tau_{33} - \tau_m \end{pmatrix} \tag{1.20}$$

---

* Un set de numere ordonate.

** Primul indice precizează axa normală la planul asupra căruia acționează tensiunea, iar al doilea indice direcția tensiunii.

Scanned with OKEN Scanner

Deviatorul tensiunilor *caracterizează schimbarea formei* unui corp, în timp ce tensorul sferic caracterizează *schimbarea volumului*. Componentele deviatorului tensiunilor au forma:

$$\tau^3\tau'_{ij} = \tau_{ij} - \tau_m\delta_{ij} \tag{1.21}$$

unde

$$\tau_m = \frac{1}{3}(\tau_{11} + \tau_{22} + \tau_{33})$$

Valoarea medie a tensiunilor normale constituie *presiunea hidrostatică* *:

$$p = -\frac{1}{3}(\tau_{11} + \tau_{22} + \tau_{33}) \tag{1.22}$$

Tensorul unitar are următoarea reprezentare matricială:

$$\delta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{1.23}$$

Pe baza celor prezentate mai sus se poate defini un tensor τ' format din tensorul τ din care s-au eliminat tensiunile normale cauzate de presiunea hidrostatică:

$$\tau = \tau' + p\delta \tag{1.24}$$

sau în forma scalară:

$$\tau_{ij} = \tau'_{ij} + p\delta_{ij} \tag{1.25}$$

Se consideră că eforturile principale, conform matricei (1.18), sînt necunoscute și sînt notate cu τ. Valoarea lor este dată de determinantul:

$$\begin{vmatrix} \tau_{11} - \tau & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{21} & \tau_{22} - \tau & \tau_{23} \\ \tau_{31} & \tau_{32} & \tau_{33} - \tau \end{vmatrix} = 0 \tag{1.26}$$

sau de ecuația cubică:

$$\tau^3 - I_{\tau 1}\tau^2 + I_{\tau 2}\tau - I_{\tau 3} = 0 \tag{1.27}$$

în care s-au introdus notațiile:

$$\begin{aligned} I_{\tau 1} &= \tau_{11} + \tau_{22} + \tau_{33} \\ I_{\tau 2} &= \tau_{11}\tau_{22} + \tau_{22}\tau_{33} + \tau_{33}\tau_{11} - (\tau_{12}^2 + \tau_{23}^2 + \tau_{31}^2) \\ I_{\tau 3} &= \tau_{11}\tau_{22}\tau_{33} + 2\tau_{12}\tau_{23}\tau_{31}\tau - \tau_{11}\tau_{23}^2 - \tau_{22}\tau_{13}^2 - \tau_{33}\tau_{12}^2 \end{aligned} \tag{1.28}$$

Coeficienții ecuației (1.27), definiți de relațiile (1.28), poartă denumirea de *invarianții tensiunilor*, întrucît valorile lor sînt independente de sistemul de coordonate. Exprimarea lor funcție de tensiunile normale principale conduce la o simplificare prin dispariția termenilor cu indici diferiți.

* Forțele de comprimare cauzate de presiune au sens opus față de axele de coordonate, ceea ce explică semnul negativ.

Scanned with OKEN Scanner

În cazul unui tensor simetric, starea de tensiune este descrisă de șase tensiuni independente

$$\tau_{ij} = \begin{pmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \cdot & \tau_{22} & \tau_{23} \\ \cdot & \cdot & \tau_{33} \end{pmatrix} \tag{1.29}$$

trei normale și trei tangențiale. Pe baza dualității tensiunilor, cele tangențiale sînt egale două cîte două.

Funcție de stările particulare de solicitare, tensorul tensiunilor va lua diferite forme. La solicitarea de întindere uniaxială pe direcția x

$$\tau_{ij} = \begin{pmatrix} \tau_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{1.30}$$

conține un singur termen. La forfecare pură în planul xoy, tensorul tensiunilor conține două componente

$$\tau_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{yx} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{1.31}$$

Unui corp solicitat de eforturi normale izotrope de tipul unei presiuni hidrostatice p îi corespunde un tensor al tensiunilor de forma

$$\tau_{ij} = \begin{pmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{pmatrix} \tag{1.32}$$

1.2.1.2. Deformația

Sub acțiunea unor solicitări externe cu corp poate suferi mișcări de translație sau (și) de rotație, fără să se modifice forma și dimensiunile. Un astfel de răspuns al corpurilor la solicitări nu se încadrează în categoria deformațiilor. Cu studiul acestor mișcări se ocupă mecanica corpului rigid.

Scanned with OKEN Scanner

Corpurile care se deformează sub acțiunea solicitărilor externe își modifică *forma* sau (și) *volumul*. Prin deformare se modifică poziția relativă a elementelor constituente. Deformația poate fi elastică și se recuperează după îndepărtarea eforturilor, sau poate fi viscoasă și rămîne nerecuperată.

Deformația elastică este proprie corpurilor solide, dar poate fi asociată și cu comportarea viscoasă, caracteristică corpurilor fluide.Un corp cu comportare perfect elastică se deformează instantaneu și recuperează instantaneu întreaga deformație, dacă aplicarea și îndepărtarea efortului este instantanee. Corpurile pur viscoase nu reacționează instantaneu la solicitări, iar deformația este în întregime nerecuperabilă.

O altă categorie de corpuri ce posedă numai elasticitate sau elasticitate și viscozitate prezintă deformații care depind de mărimea solicitărilor și de timp. Fenomenul de deformare a acestor corpuri se numește *fluaj*, iar cel de recuperare a unei părți din deformație, *fluaj invers*.

Un corp ce formează un continuu, este deformat sub acțiunea solicitărilor externe. Prin deformare elementele constituente se deplasează, ceea ce modifică poziția relativă a acestora. Problema care se pune constă în stabilirea modului de exprimare analitică a deformațiilor în vederea corelării cu mărimea solicitărilor.

Un punct al unui corp, într-un sistem de coordonate fix, în starea inițială coincide cu punctul geometric $M(x_1, x_2, x_3)$, de vector de poziție $\mathbf{r}$, (fig. 13). După deformație, la atingerea echilibrului dinamic, se va găsi în punctul geometric $M'(x'_1, x'_2, x'_3)$, de vector de poziție $\mathbf{r}'$. *Deplasarea* $MM' = \mathbf{X}$ va fi o mărime vectorială cu componentele $X_i (i = 1, 2, 3)$. Coordonatele punctului M' vor fi:

$$x'_i = x_i + X_i \tag{1.33}$$

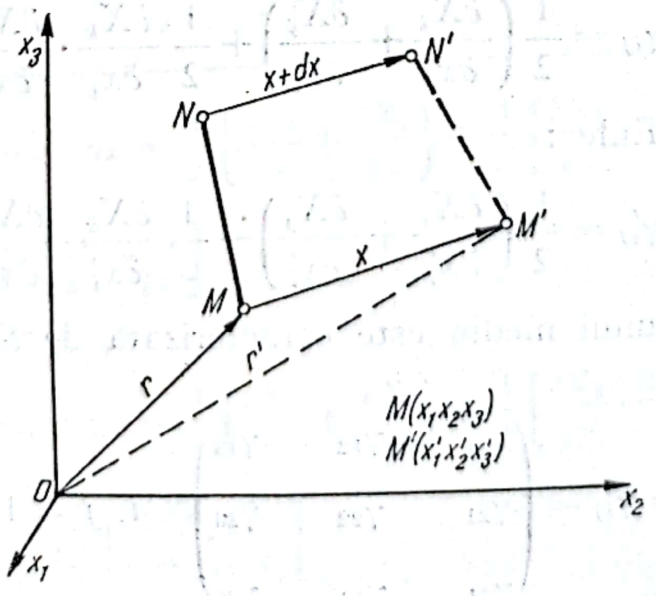


Fig. 1.3. Deplasarea prin deformare.

Scanned with OKEN Scanner

Ecuațiile care caracterizează deformația vor fi de forma:

$$x_i' = x_i'(x_1,\ x_2,\ x_3,\ t) \tag{1.34}$$

iar starea de deplasare a solidului deformabil este descrisă de trei funcții de forma:

$$X_i = X_i(x_1,\ x_2,\ x_3,\ t) \tag{1.35}$$

Variabilele x_1, x_2, x_3, corespunzătoare stării inițiale, se pot considera variabile independente, numite *coordonate Lagrange* sau *coordonate materiale*, întrucît în fenomenul de deformare este urmărită o particulă materială a corpului în deplasarea ei. De asemenea, se pot considera variabilele x_1', x_2', x_3', ca variabile independente, denumindu-le *coordonate Euler* sau *coordonate spațiale*. În acest caz, într-un punct din spațiu este urmărită o particulă materială care prin deplasare ajunge în acest punct. Coordonatele sînt funcție de timp, iar starea de deplasare este dată de funcțiile:

$$X_i = X_i(x_1',\ x_2',\ x_3',\ t) \tag{1.36}$$

Funcție de tipul de coordonate ales pentru deformații finite, se ajunge la două formulări distincte, formulări care devin identice numai în cazul micilor deformații [1].

Se consideră două puncte învecinate $M(x_1,\ x_2,\ x_3)$ și $N(x_1+\mathrm{d}x_1,\ x_2+\mathrm{d}x_2,\ x_3+\mathrm{d}x_3)$ care, după deformație, devin punctele M' și N' (fig. 1.3).

Segmentul $\overline{MN}$ prin deformare devine $\overline{M'N'}$. În coordonate Lagrange componentele tensorului deformație au forma:

$$\gamma_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial X_i}{\partial x_j} + \frac{\partial X_j}{\partial x_i}\right) + \frac{1}{2}\,\frac{\partial X_k}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial X_k}{\partial x_j} \tag{1.37}$$

și în coordonate Euler:

$$\gamma_{ij}' = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial X_i}{\partial x_j'} + \frac{\partial X_j}{\partial x_i'}\right) - \frac{1}{2}\,\frac{\partial X_k}{\partial x_i'}\cdot\frac{\partial X_k}{\partial x_j'} \tag{1.38}$$

Deformația unui mediu este caracterizată de *tensorul simetric al deformațiilor*:

$$\gamma = \gamma_{ij} = \begin{pmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \gamma_{13} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \gamma_{23} \\ \gamma_{31} & \gamma_{32} & \gamma_{33} \end{pmatrix} \quad i,\ j = 1,\ 2,\ 3 \tag{1.39}$$

Scanned with OKEN Scanner

format din nouă componente, ale căror expresii, conform ecuației (1.37), sînt date în tabelul 1.1. În cazul coordonatelor Euler se obțin ecuații similare.:

Tabelul 1.1

Componentele tensorului deformație în coordonate rectangulare (deformații finite)

Componente	Expresia componentei
Normale	$\gamma_{xx} = \frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial X_x}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial X_y}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial X_z}{\partial x}\right)^2\right]$
	$\gamma_{yy} = \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial X_y}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial X_y}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial X_z}{\partial y}\right)^2\right]$
	$\gamma_{zz} = \frac{\partial X_z}{\partial z} + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial X_x}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial X_y}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial X_z}{\partial z}\right)^2\right]$
Tangențiale	$\gamma_{xy} = \gamma_{yx} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial X_x}{\partial y} + \frac{\partial X_y}{\partial x}\right) + \frac{1}{2}\left[\frac{\partial X_x}{\partial x}\cdot\frac{\partial X_x}{\partial y} + \frac{\partial X_y}{\partial x}\cdot\frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial x}\cdot\frac{\partial X_z}{\partial z}\right]$
	$\gamma_{xz} = \gamma_{zx} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial X_x}{\partial z} + \frac{\partial X_z}{\partial x}\right) + \frac{1}{2}\left[\frac{\partial X_x}{\partial x}\cdot\frac{\partial X_x}{\partial z} + \frac{\partial X_y}{\partial x}\cdot\frac{\partial X_y}{\partial z} + \frac{\partial X_z}{\partial x}\cdot\frac{\partial X_z}{\partial z}\right]$
	$\gamma_{yz} = \gamma_{zy} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial X_y}{\partial z} + \frac{\partial X_z}{\partial y}\right) + \frac{1}{2}\left[\frac{\partial X_x}{\partial y}\cdot\frac{\partial X_x}{\partial z} + \frac{\partial X_y}{\partial y}\cdot\frac{\partial X_y}{\partial z} + \frac{\partial X_z}{\partial y}\cdot\frac{\partial X_z}{\partial z}\right]$

Scanned with OKEN Scanner

Pentru tensorul simetric al deformației (1.31) există un alt sistem de axe principale de referință 1″, 2″, 3″, în care are forma

$$\gamma = \begin{pmatrix} \gamma''_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \gamma''_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \gamma''_{33} \end{pmatrix} \tag{1.40}$$

Matricea (1.40) este forma diagonală a matricei (1.39), componentele ei fiind numite *deformații* sau *alungiri principale*. Aceasta demonstrează că deformația se poate realiza sub acțiunea unor eforturi de tracțiune după trei direcții ortogonale.

Exprimarea tensorului deformațiilor prin deformațiile normale medii γ_m, formează *tensorul sferic al deformațiilor*:

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} \gamma_m & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_m & 0 \\ 0 & 0 & \gamma_m \end{pmatrix} \tag{1.41}$$

Diferența între tensorul deformațiilor și tensorul sferic al deformațiilor se numește *deviatorul deformațiilor*:

$$\gamma' = \gamma - \gamma^0 = \begin{pmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \gamma_{13} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \gamma_{23} \\ \gamma_{31} & \gamma_{32} & \gamma_{33} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \gamma_m & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_m & 0 \\ 0 & 0 & \gamma_m \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \gamma_{11} - \gamma_m & \gamma_{12} & \gamma_{13} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} - \gamma_m & \gamma_{23} \\ \gamma_{31} & \gamma_{32} & \gamma_{33} - \gamma_m \end{pmatrix} \tag{1.42}$$

Deviatorul deformațiilor caracterizează schimbarea formei, în timp ce tensorul sferic al deformației caracterizează schimbarea volumului.

Componentele deviatorului deformațiilor se scriu

$$\gamma'_{ij} = \gamma_{ij} - \frac{1}{3}\gamma_v \delta_{ij} \tag{1.43}$$

unde

$$\gamma_v = \gamma_{11} + \gamma_{22} + \gamma_{33}$$

În cazul deformațiilor principale necunoscute, γ, valoarea lor este dată de un determinant similar cu (1.26), respectiv de ecuația:

$$\gamma^3 - I_{\gamma 1}\gamma^2 + I_{\gamma 2}\gamma - I_{\gamma 3} = 0 \tag{1.44}$$

unde *invarianții tensorului deformație* au forma:

$$\begin{aligned} I_{\gamma 1} &= \gamma_{11} + \gamma_{22} + \gamma_{33} \\ I_{\gamma 2} &= \gamma_{11}\gamma_{22} + \gamma_{22}\gamma_{33} + \gamma_{33}\gamma_{11} - (\gamma_{12}^2 + \gamma_{23}^2 + \gamma_{31}^2) \\ I_{\gamma 3} &= \gamma_{11}\gamma_{22}\gamma_{33} + 2\gamma_{12}\gamma_{23}\gamma_{31} - \gamma_{11}\gamma_{23}^2 - \gamma_{22}\gamma_{31}^2 - \gamma_{33}\gamma_{12}^2 \end{aligned} \tag{1.45}$$

Invarianții exprimați funcție de deformațiile principale normale iau o formă simplificată prin dispariția termenilor cu indici diferiți.

Scanned with OKEN Scanner

Deformația specifică liniară sau *alungirea specifică* după direcția versorului n, în coordonate materiale, se definește:

$$\gamma_n = \frac{X^t - X}{X} \tag{1.46}$$

sau în coordonate spațiale:

$$\gamma'_n = \frac{X^t - X}{X^t} \tag{1.47}$$

în care X^t și X reprezintă lungimea inițială, respectiv finală a unui segment.

În literatură [11, 18] sînt date și alte moduri de definire a deformației specifice liniare. Dintre acestea mai comune sînt următoarele:

$$\gamma_n = \frac{(X^t)^2 - X^2}{2X^2} \tag{1.48}$$

$$\gamma'_n = \frac{(X^t)^2 - X^2}{2(X^t)^2} \tag{1.49}$$

$$\gamma''_n = \ln \frac{X^t}{X} \tag{1.50}$$

Se observă că relația (1.48) se referă la coordonate Lagrange și relația (1.49) la coordonate Euler.

Dependența între deformația specifică liniară γ_n, respectiv γ''_n și componentele tensorului deformație [v. ec. (1.37) și (1.38)] este dată de relațiile:

$$\gamma_n = \sqrt{1 + 2\gamma_{ij} n_i n_j} - 1 \tag{1.51}$$

$$\gamma'_n = 1 - \sqrt{1 - 2\gamma'_{ij} n'_i n'_j} \tag{1.52}$$

în care n_i și n_j sau n'_i și n'_j sînt cosinusurile directoare în coordonate materiale respectiv, în coordonate spațiale.

Deformația specifică volumică în coordonate Lagrange este dată de:

$$1 + \gamma_v = \det \left| \delta_{ij} + \frac{\partial X_i}{\partial x_j} \right| \tag{1.53}$$

și în coordonate Euler

$$1 - \gamma'_v = \det \left| \delta_{ij} - \frac{\partial X_i}{\partial x_j} \right| \tag{1.54}$$

Scanned with OKEN Scanner

sau mai departe [1],

$$(1+\gamma_v)(1-\gamma'_v)=1 \tag{1.55}$$

În cazul deformațiilor mici, deformațiile specifice pot fi neglijate în raport cu unitatea și produsul a două deformații specifice poate fi neglijat în raport cu a treia deformație specifică. Pe baza acestor considerații ecuațiile (1.37) și (1.38) se simplifică și devine identice

$$\gamma_{ij}=\gamma'_{ij}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial X_i}{\partial x_j}+\frac{\partial X_j}{\partial x_i}\right) \tag{1.56}$$

Componentele tensorului de deformație, pentru deformații mici, au aceeași expresie atît în coordonate materiale cît și în coordonate spațiale. Expresiile lor sînt date în tabelul 1.2 [1].

Deformația volumică funcție de deformațiile specifice liniare după cele trei direcții, va fi:

$$\gamma_v=\gamma_{xx}+\gamma_{yy}+\gamma_{zz} \tag{1.57}$$

și deformația specifică medie

$$\gamma_m=\frac{1}{3}(\gamma_{xx}+\gamma_{yy}+\gamma_{zz}) \tag{1.58}$$

Starea de deformare este definită, conform tensorului (1.39), de nouă componente. Datorită simetriei deformațiilor specifice de forfecare, starea de deformare este dată numai de șase componente.

$$\gamma_{ij}=\begin{pmatrix}\gamma_{11} & \gamma_{12} & \gamma_{13}\\ \cdot & \gamma_{22} & \gamma_{23}\\ \cdot & \cdot & \gamma_{33}\end{pmatrix} \tag{1.59}$$

1.2.1.3. Viteza de deformare

Sub acțiunea unor solicitări externe corpurile deformabile se pot deforma cu viteze diferite. Deformarea poate fi instantanee sau are loc într-un inverval finit de timp. Solidele perfect elastice la aplicarea unei forțe sub formă de impact se deformează instantaneu. Deformația este proporțională cu forța. Fluidele pur vîscoase, sub acțiunea unei tensiuni tangențiale date, se deformează continuu, deformația putînd lua orice valoare, în schimb viteza de deformare va fi constantă.

În studiul curgerii fluidelor trebuie să se țină cont de viteza de deformare, întrucît solicitarea este proporțională cu viteza de deformare

Scanned with OKEN Scanner

Tabelul 1.2

Componentele tensorului deformație (deformații mici)

Coordonate	Componentele deplasării	Expresia componentei
Rectangulare carteziene x, y, z	X_x X_y X_z	$\gamma_{xx} = \frac{\partial X_x}{\partial x} \quad \gamma_{yy} = \frac{\partial X_y}{\partial y} \quad \gamma_{zz} = \frac{\partial X_z}{\partial z}$ $\gamma_{xy} = \gamma_y = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial X_x}{\partial y} + \frac{\partial X_y}{\partial x}\right)$ $\gamma_{xz} = \gamma_{zx} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial X_x}{\partial z} + \frac{\partial X_z}{\partial x}\right)$ $\gamma_{yz} = \gamma_{zy} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial X_y}{\partial z} + \frac{\partial X_z}{\partial y}\right)$
Cilindrice r, θ, z	X_r X_θ X_z	$\gamma_{rr} = \frac{\partial X_r}{\partial r} \quad \gamma_{\theta\theta} = \frac{1}{r}\frac{\partial X_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r} X_r \quad \gamma_{zz} = \frac{\partial X_z}{\partial z}$ $\gamma_{r\theta} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial X_r}{\partial \theta} + \frac{\partial X_\theta}{\partial r} - \frac{1}{r} X_\theta\right)$ $\gamma_{rz} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial X_z}{\partial r} + \frac{\partial X_r}{\partial z}\right)$ $\gamma_{\theta z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial X_\theta}{\partial z} \frac{1}{r}\frac{\partial X_z}{\partial \theta}\right)$
Sferice $r, \theta \varnothing$	X_r X_θ $X_\varnothing$	$\gamma_{rr} = \frac{\partial X_r}{\partial r}$ $\gamma_{\theta\theta} = \frac{1}{r}\frac{\partial X_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r} X_r$ $\gamma_{\varnothing\varnothing} = \frac{1}{r \sin\theta}\frac{\partial X_\varnothing}{\partial_\varnothing} + \frac{1}{r} X_r + \frac{\operatorname{ctg}\theta}{r} X_\theta$ $\gamma_{r\theta} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial X_r}{\partial \theta} + \frac{\partial X_\theta}{\partial r} - \frac{1}{r} X_\theta\right)$ $\gamma_{r\varnothing} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial X_\varnothing}{\partial r} + \frac{1}{r \sin\theta}\frac{\partial X_r}{\partial_\varnothing} - \frac{1}{r} X_\varnothing\right)$ $\gamma_{\theta\varnothing} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r \sin\theta}\frac{\partial X_\varnothing}{\partial} + \frac{1}{r}\frac{\partial X_\varnothing}{\partial\theta} - \frac{\operatorname{cotg}\theta}{r} X_\varnothing\right)$

Scanned with OKEN Scanner

sau deformația depinde de valoarea solicitării și de timpul de solicitare. Vitezele de deformare sînt derivatele totale ale deplasărilor în raport cu timpul [4].

$$v_i = \frac{\mathrm{d}X_i}{\mathrm{d}t} \tag{1.60}$$

sau

$$v_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\mathrm{d}X_i}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\mathrm{d}X_j}{\mathrm{d}t}\right) \tag{1.61}$$

În cazul deformațiilor mici termenii neliniari pot fi neglijați și se obține

$$v_{ij} = \frac{\partial}{\partial t} X_i$$

și mai departe, numai în acest caz, se poate scrie:

$$\dot{\gamma}_{ij} = \frac{\partial \gamma_{ij}}{\partial t} \tag{1.62}$$

Tensorul vitezei de deformare este dat de

$$\dot{\gamma} = \dot{\gamma}_{ij} = \begin{pmatrix} \dot{\gamma}_{11} & \dot{\gamma}_{12} & \dot{\gamma}_{13} \\ \dot{\gamma}_{21} & \dot{\gamma}_{22} & \dot{\gamma}_{23} \\ \dot{\gamma}_{31} & \dot{\gamma}_{32} & \dot{\gamma}_{33} \end{pmatrix} \quad ij = 1, 2, 3 \tag{1.63}$$

sau componentele acestuia în formă scalară

$$\dot{\gamma}_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right) \tag{1.64}$$

Expresiile componentelor tensorului vitezei de deformare în coordonate carteziene rectangulare sînt date în tabelul 1.3.

Tensorul de ordinul doi poate fi descompus într-o parte simetrică și alta antisimetrică. Astfel, prin similitudine cu ecuația (1.7) se obțin trei componente antisimetrice:

$$\omega_x = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}\right) \tag{1.65}$$

$$\omega_y = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}\right)$$

Scanned with OKEN Scanner

Tabelul 1.3

Componentele tensorului vitezelor de deformare

Coordonate	Expresia componentei	
	Normale	Tangențiale
Rectangulare carteziene	$\dot{\gamma}_{xx} = \frac{\partial v_x}{\partial x}$ $\dot{\gamma}_{yy} = \frac{\partial v_y}{\partial y}$ $\dot{\gamma}_{zz} = \frac{\partial v_z}{\partial z}$	$\dot{\gamma}_{xy} = \dot{\gamma}_{yx} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x}\right)$ $\dot{\gamma}_{yz} = \dot{\gamma}_{zy} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y}\right)$ $\dot{\gamma}_{zx} = \dot{\gamma}_{xz} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x}\right)$
Cilindrice	$\dot{\gamma}_{rr} = \frac{\partial v_r}{\partial r}$ $\dot{\gamma}_{\theta\theta} = \frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r}{r}$ $\dot{\gamma}_{zz} = \frac{\partial v_z}{\partial z}$	$\dot{\gamma}_{r\theta} = \dot{\gamma}_{\theta r} = \frac{1}{2}\left[r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{v_\theta}{r}\right) + \frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \theta}\right]$ $\dot{\gamma}_{\theta z} = \dot{\gamma}_{z\theta} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_z}{\partial \theta}\right)$ $\dot{\gamma}_{zr} = \dot{\gamma}_{rz} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{\partial v_r}{\partial z}\right)$
Sferice	$\dot{\gamma}_{rr} = \frac{\partial v_r}{\partial r}$ $\dot{\gamma}_{\theta\theta} = \frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r}{r}$ $\dot{\gamma}_{\varnothing\varnothing} = \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial v_\varnothing}{\partial \varnothing} + \frac{v_r}{r} + \frac{v_\theta \operatorname{ctg}\theta}{r}$	$\dot{\gamma}_{r\theta} = \dot{\gamma}_{\theta r} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{v_\theta}{r}\right) + \frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \theta}\right]$ $\dot{\gamma}_{\theta\varnothing} = \dot{\gamma}_{\varnothing\theta} = \frac{1}{2}\left[\frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{v_\varnothing}{\sin\theta}\right) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial v_\theta}{\partial \varnothing}\right]$ $\dot{\gamma}_{\varnothing r} = \dot{\gamma}_{r\varnothing} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial v_r}{\partial \varnothing} + r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{v_\varnothing}{r}\right)\right]$

și

$$\omega_z = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right)$$

care definesc *viteza unghiulară de rotație* și sînt denumite *vorticitate*.

Scanned with OKEN Scanner

Viteza de deformare volumică este egală cu

$$\dot{\gamma}_v = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = \operatorname{div} \mathbf{v} = \nabla \mathbf{v} \tag{1.66}$$

Prin analogie cu ecuațiile (1.27), (1.28), (1.44) și (1.45) se pot scrie *invarianții tensorului vitezei de deformare* și ecuația cubică a vitezei de deformare.

1.2.2. RELAȚII ÎNTRE TENSIUNE ȘI DEFORMAȚIE SAU VITEZĂ DE DEFORMARE

Diversitatea proprietăților corpurilor din natură face ca ele să reacționeze în moduri diferite la solicitările externe. De asemenea, diversitatea solicitărilor și a modului de aplicare a acestora conduce la o gamă largă de răspunsuri ce se concretizează prin deformații și viteze de deformare diferite.

Ecuațiile ce corelează tensiunile cu deformațiile, în cazul corpurilor elastice, sau tensiunile cu viteza de deformare pentru corpurile vîscoase, conțin un număr de coeficienți de material. Pentru mediile anizotrope și neomogene sînt necesari 81 de coeficienți de material [17]. Numărul acestora pentru corpurile omogene se reduce la 21, iar pentru cele omogene și izotrope sînt necesari numai doi coeficienți.

1.2.2.1. Coeficienții lui Lamé

Se notează cu τ''_{11}, τ''_{22} și τ''_{33} eforturile principale și cu γ''_{11}, γ''_{22} și γ''_{33} deformațiile specifice principale conform matriciilor (1.18) și (1.40). Dependența între efort și deformație va fi dată de

$$\begin{aligned} \tau''_{11} &= k_1\gamma''_{11} + k_2\gamma''_{22} + k_3\gamma''_{33} \\ \gamma''_{22} &= k'_1\gamma''_{11} + k'_2\gamma''_{22} + k'_3\gamma''_{33} \\ \gamma''_{33} &= k''_1\gamma''_{11} + k''_2\gamma''_{22} + k^3_{''}\gamma''_{33} \end{aligned} \tag{1.67}$$

Condiția de omogenitate și izotropie impune

$$\begin{aligned} k_2 = k_3 = k'_1 = k'_3 = k''_1 = k''_2 = \lambda_L \\ k_1 = k'_2 = k''_3 = \lambda_L + 2\lambda_e \end{aligned} \tag{1.68}$$

În coordonate rectangulare, în formă scalară, ecuțiile (1.56) se pot scrie:

$$\tau_{ij} = \lambda_L \delta_{ij} \sum_i \gamma_{ii} + 2\lambda_e \gamma_{ij} \tag{1.69}$$

Scanned with OKEN Scanner

Acestea sînt ecuațiile lui Lamé, în care λ_L și λ_e sînt coeficienții lui Lamé, δ_{ij} simbolul lui Kronecker, γ_{ii} deformația volumică și γ_{ij} deformația ce modifică forma corpului.

Coeficienții lui Lamé sînt înlocuiți în teoria elasticității de coeficienții de material: *modulul lui Young* și *coeficientul lui Poisson.*

1.2.2.2. Modulul lui Young

Modulul de elasticitate al lui Young este specific deformațiilor de alungire ale corpurilor solide elastice. Un corp (figura 1.4) solicitat la tracțiune pe direcția y de o forță F aplicată pe suprafața A, se va alungi.

Modulul lui Young este dat de raportul dintre tensiunea normală și alungirea specifică [19, 22].

$$E = \frac{(\partial F/A)}{(\partial L/L)} = \frac{\tau_{yy}}{\gamma_{yy}} \tag{1.70}$$

Inversul modulului de elasticitate reprezintă *complianța la alungire* simplă J_E.

1.2.2.3. Coeficientul lui Poisson

Un corp solid supus la o tensiune normală ce acționează după o singură direcție se va alungi după direcția de solicitare și se va contracta după celelalte două direcții. În cazul solicitării după o singură direcție y

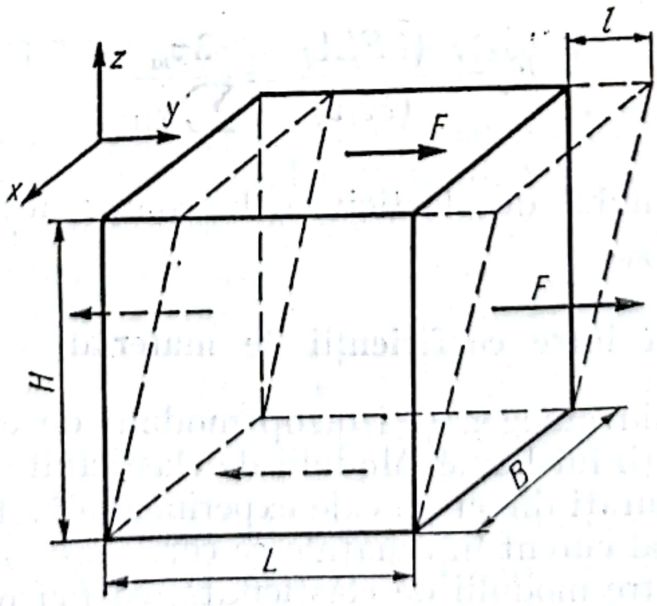


Fig. 1.4. Corp supus la solicitări simple.

(fig. 1.4), *coeficientul lui Poisson* este dat de raportul între contracția specifică a laturilor H sau B și alungirea specifică a laturii L

$$\mu = -\frac{(\partial B/B)}{(\partial L/L)} = -\frac{\gamma_{xx}}{\gamma_{yy}} \tag{1.71}$$

Cînd volumul corpului solicitat nu se modifică $\mu = 1/2$ sau la creșterea volumului $\mu < 1/2$.

1.2.2.4. Modulul de elasticitate la forfecare

Un solid cu comportare elastică supus la forfecare simplă se va deforma (v. fig. 1.4 cu linii punctate). Deformația afectează numai forma corpului. *Modulul de elasticitate la forfecare* sau *modulul de rigiditate* este dat de raportul dintre tensiunea de forfecare și deformație.

$$G = \frac{(\partial F/A)}{(\partial l/H)} = \frac{\tau_{zy}}{\gamma_{zy}} \tag{1.72}$$

Complianța la forfecare simplă J_G este dată de inversul modulului de elasticitate.

1.2.2.5. Modulul de elasticitate la compresie

Un corp supus la presiune izotropă își micșorează volumul fără să-și modifice forma. *Modulul de elasticitate la compresie* este dat de raportul între presiune și deformația specifică volumică.

$$E_v = \frac{(\partial F/A)}{(\partial v/v)} = \frac{3\tau_m}{\sum_i \gamma_{ii}} \tag{1.73}$$

Inversul modulului de elasticitate la compresie se numește *complianță de volum*, J_{Ev}.

1.2.2.7. Relații între coeficienții de material

Pentru un solid omogen și izotrop modulii de elasticitate depind numai de coeficienții lui Lamé. Modulii de elasticitate și coeficientul lui Poisson pot fi măsurați direct pe cale experimentală. Din această cauză sînt utilizați în mod curent în ecuațiile ce corelează solicitarea cu deformația. Relațiile între modulii de elasticitate, coeficientul lui Poisson și coeficienții lui Lamé sînt date în tabelul 1.4 [22].

Scanned with OKEN Scanner

Tabelul 1.4

Relații între coeficienții de material

În funcție de	Relația pentru λ_L	λ_e	μ	E	G	E_v
λ_L, λ_e	—	—	$\frac{\lambda_L}{2(\lambda_L+\lambda_e)}$	$\frac{\lambda_e(3\lambda_L+2\lambda_e)}{\lambda_L+\lambda_e}$	λ_e	$\frac{3\lambda_L+2\lambda_e}{3}$
μ, E	$\frac{E\mu}{(1+\mu)(1-2\mu)}$	$\frac{E}{2(1+\mu)}$	—	—	$\frac{E}{2(1+\mu)}$	$\frac{E}{3(1-2\mu)}$
E, G	$\frac{G(2G-E)}{E-3G}$	G	$\frac{E-2G}{2G}$	—	—	$\frac{EG}{9G-3E}$
μ, G	$\frac{2\mu G}{1-2\mu}$	G	—	$2G(1+\mu)$	—	$\frac{2G(1+\mu)}{3(1-2\mu)}$
G, E_v	$\frac{3E_v-2G}{2}$	G	$\frac{3E_v-2G}{6E_v}$	$\frac{9GE_v}{3E_v+G}$	—	—
μ, E_v	$\frac{1-\mu}{E_v}$	$\frac{3E_v(1-2\mu)}{2(1+\mu)}$	—	$3E_v(1-2\mu)$	$\frac{3E_v(1-2\mu)}{2(1+\mu)}$	—

1.2.2.7. Coeficienții de vîscozitate

O tensiune tangențială aplicată unui corp solid îl deformează modificîndu-i forma, sau, dacă corpul este fluid, va avea loc o curgere. La solicitare constantă, viteza de deformare a corpurilor fluide este constantă.

Dependența între solicitare și viteza de deformare pentru un fluid izotrop * se poate scrie într-o formă similară cu ecuația (1.69):

$$\tau_{ij} = \lambda\delta_{ij}\sum_i \dot{\gamma}_{ii} + 2\eta\dot{\gamma}_{ij} \tag{1.74}$$

în care λ și η sînt coeficienți de material, $\dot{\gamma}_{ii}$ viteza de deformare volumică și $\dot{\gamma}_{ij}$ viteza de modificare a formei corpului.

* Puține fluide prezintă anizotropie; de exemplu, cristalii lichizi.

Scanned with OKEN Scanner

Coeficientul de viscozitate la forfecare simplă sau *viscozitatea dinamică* η este dat de raportul între tensiunea tangențială și viteza de forfecare

$$\eta = \frac{\tau_{ij}}{\dot{\gamma}_{ij}} \tag{1.75}$$

Pentru fluide newtoniene viscozitatea este independentă de parametrii solicitării. Ea este influențată hotărîtor de temperatură. Inversul viscozității se numește *fluiditate* sau *complianță* și se notează cu J_η.

Descrierea cantitativă a procesului de deformare a fluidelor solicitate la tracțiune se face cu ecuația lui Trouton, care definește *coeficientul viscozității longitudinale* sau *viscozitatea Trouton*

$$\eta_l = \frac{\tau_{ii}}{\dot{\gamma}_{ii}} \tag{1.76}$$

După Trouton $\eta_l = 3\eta$.

În teoria curgerii fluidelor viscoase se utilizează și cel de *al doilea coeficient de viscozitate* sau *viscozitatea volumică*, care conform ecuației (1.74) este dat de

$$\eta_v = \lambda + \frac{2}{3}\eta \tag{1.77}$$

El intervine în deformațiile care afectează volumul corpului. Inversul acestei viscozități este *fluiditatea volumică* $J_{\eta v}$.

Foarte multe materiale de mare importanță tehnică în curgere au o comportare nenewtoniană. La aceste fluide coeficientul de viscozitate dinamică depinde de viteza de forfecare. Corelația între τ_{ij} și $\dot{\gamma}_{ij}$ este similară cu ecuația (1.75)

$$\eta_a = \frac{\tau_{ij}}{\dot{\gamma}_{ij}} \tag{1.78}$$

iar factorul de proporționalitate η_a este denumit *viscozitate aparentă*. Dependența viscozității aparente de viteza de forfecare se datorește modificărilor de structură ce apar în faza fluidă sub acțiunea solicitărilor.

1.2.2.8. Prag de tensiune

Corpul plastic, pe un domeniu suficient de larg de solicitări se comportă diferit. Sub acțiunea unei forțe mici manifestă comportare de corp elastic sau rigid, iar după ce forța atinge o anumită valoare, începe să se comporte ca un fluid viscos. Deformația din primul domeniu este

Scanned with OKEN Scanner

recuperabilă, pe cînd în domeniul solicitărilor mari deformația devine permanentă. Comportarea de corp solid, elastic sau rigid și comportarea de corp fluid viscos, preponderent se manifestă succesiv. Tensiunea care marchează trecerea de la corp elastic la corp viscos poartă denumirea de *prag de tensiune*, *prag de curgere* sau *limită de elasticitate* și se notează cu τ_0.

1.2.3. FLUAJ ȘI RELAXARE

Curgerea este un caz particular al deformației și se caracterizează prin aceea că deformația nu se recuperează după îndepărtarea forței. Unele corpuri solide sau fluide, și anume cele cu proprietăți viscoelastice, manifestă fenomene de fluaj și relaxare. Acești termeni sînt folosiți în două sensuri: fie că reprezintă un anumit tip de experiență, fie că se referă la un fenomen.

Dacă asupra unui corp acționează o tensiune constantă și acesta nu se deformează instantaneu sau cu viteză constantă, ci prezintă deformații dependente de timp, se zice că manifestă fenomenul de *fluaj*.

Tensiunea necesară pentru menținerea unui corp viscoelastic la deformație constantă scade lent în timp, *tensiunea se relaxează*, iar corpul manifestă fenomenul de *relaxare*.

Rezultă că este imposibil să se traseze curbele tensiune — deformație pentru corpurile viscoelastice fără să se țină cont de factorul timp. În astfel de cazuri se impune o tensiune sau o deformație constantă, funcție de fenomenul studiat și se urmărește în timp variația celuilalt parametru al solicitării.

Experiențele de fluaj se efectuează cu un corp care a stat un timp îndelungat în repaus și asupra lui se aplică, sub formă de impact, o tensiune constantă τ_k. Se urmărește variația deformației în timp, pe baza căreia se trasează curba de fluaj și de asemenea se stabilește *funcția de fluaj*.

$$\mathcal{F}(\tau_k, t) = \frac{\gamma}{\tau_k} \tag{1.79}$$

care definește deformația corespunzătoare unității de tensiune. După un timp determinat t_k, tensiunea se îndepărtează și se urmărește recuperarea parțială a deformației în timp. Se obține *curba de recuperare* sau *curba de fluaj invers* (fig. 1.5). Pe întregul interval de timp se va obține o curbă formată din două părți, prima parte este curba de fluaj, iar partea a doua curba de fluaj invers, (fig. 1.5, *a*).

Scanned with OKEN Scanner

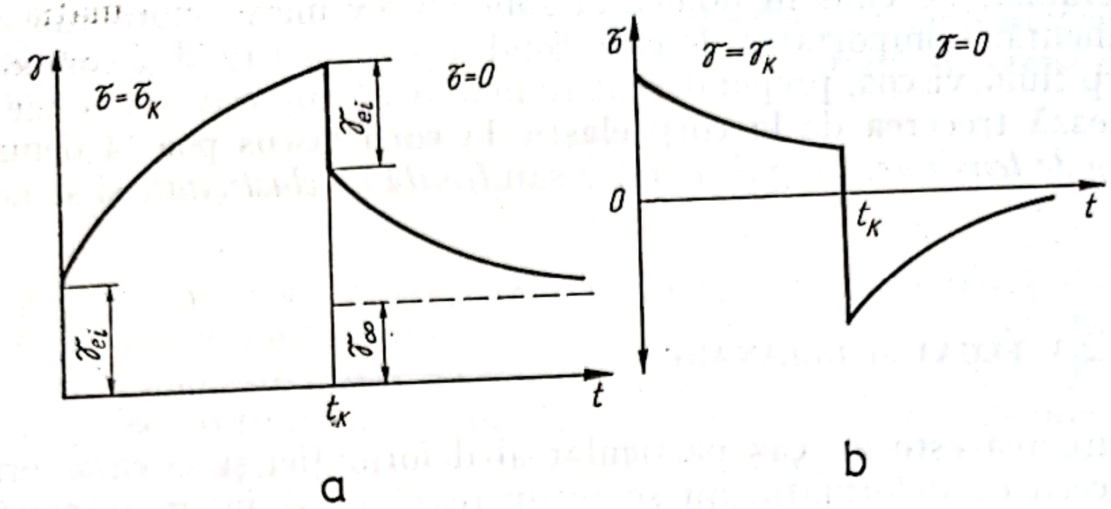


Fig. 1.5. Curbe de fluaj și relaxare.

Cînd pe curba de fluaj apare o deformație instantanee γ_{ei} ea va apare și pe curba de recuperare în momentul anulării tensiunii. Restul deformației elastice se recuperează lent în timp, curba de fluaj invers tinde asimptotic către o valoare constantă γ_∞, numită *deformație remanentă* sau *permanentă*.

Experiențele de relaxare se efectuează cu un corp a cărui deformație a fost egală cu zero, un timp foarte îndelungat și brusc este adus la o deformație γ_k ce rămîne constantă un timp (fig. 1.5, *b*). Se urmărește variația tensiunii în timp. La timpul t_k deformația se reduce la zero, ceea ce poate necesita o tensiune negativă. Pe baza rezultatelor obținute se trasează *curba de relaxare* și se deduce *funcția de relaxare*

$$\mathcal{R}(\gamma_k, t) = \frac{\tau}{\gamma_k} \tag{1.80}$$

ce definește tensiunea corespunzătoare unei deformații egale cu unitatea.

În cazul fluidelor efectul comportării viscoelastice se cercetează prin experiențe de relaxare sau prin manifestarea efectului tensiunilor normale. Curbele de relaxare se obțin prin supunerea fluidului la solicitări cu viteză de forfecare constantă și urmărirea în timp a variației tensiunii de forfecare.

1.3. MECANICA CONTINUULUI

Fizica modernă și-a înscris între preocupările de bază, teoria moleculară a constituției materiei. O porțiune dintr-un corp nu se poate subdivide în fragmente tot mai mici și cea mai mică subdiviziune să

Scanned with OKEN Scanner

posede aceleași proprietăți ca ale bucății inițiale. Prin divizări repetate, în final se ajunge la moleculele sau atomii materiei. Orice corp privit la scara atomului prezintă *discontinuități*. Comportarea acestuia este determinată de structura moleculară și supramoleculară ca și de forțele intra și intermoleculare.

În multe ramuri ale științei, printre care și reologia, este convenabil uneori să se ignoreze natura moleculară a materiei și să se adopte ipoteza că materia formează un *continuu*. *Un continuu este o substanță ipotetică lipsită de structură*. Conform acestei ipoteze materia este distribuită continuu în masa corpului și oricărui punct geometric îi corespunde un punct material, căruia îi putem atribui variabile cinematice sau dinamice care, în sistemul de coordonate spațiale, sînt funcții continui ale acestui punct [7,20].

Procesele tehnologice industriale sînt constituite dintr-o succesiune de operații, multe bazate pe mișcarea mecanică, ca exemplu translația, rotația, deformarea sau curgerea corpurilor. Conform teoriei moleculare, descrierea mișcării masei unui corp se face cu o serie de ecuații diferențiale pentru fiecare moleculă. Ipoteza continuului oferă avantajul unui număr redus de ecuații diferențiale cu derivate parțiale, cu ajutorul cărora se descrie mișcarea corpurilor solide rigide, a corpurilor solide deformabile sau ale fluidelor [8]. Ecuațiile sînt valabile pentru toate mediile, independent de starea lor de agregare, cu excepția mediilor discrete. Coeficienții ce afectează ecuațiile pot fi calculați pe baza teoriei moleculare sau, practic, se obțin pe cale experimentală.

Un corp, sau parte a acestuia, poate fi supus la acțiunea unor forțe provenite din mediul înconjurător, care sînt independente una de alta. Pentru a clarifica natura forțelor ce acționează asupra unui mediu deformabil, se consideră un corp C, în interiorul căruia un volum V este limitat de suprafața de control A (fig. 1.6). Masa M a volumului V rămîne

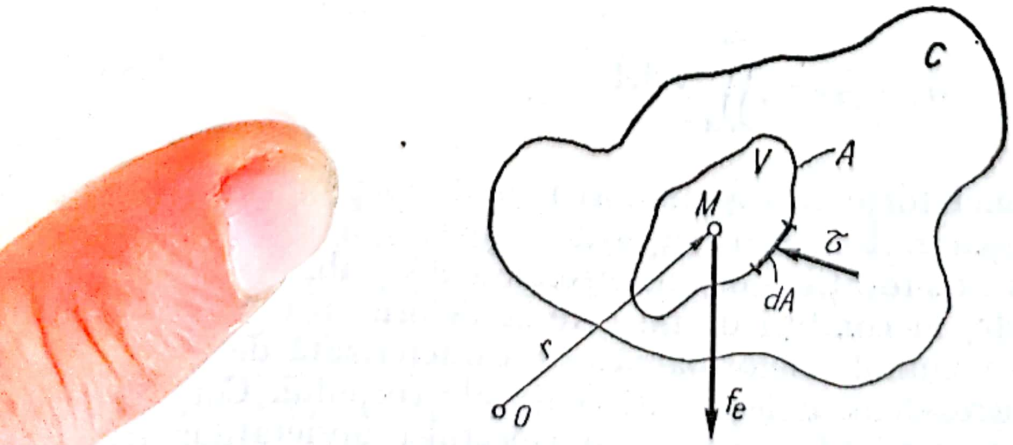


Fig. 1.6. Corp solicitat.

Scanned with OKEN Scanner

constantă, pe cînd forma și dimensiunile se modifică în timp, ca urmare a deformării corpului C. Forțele ce pot acționa asupra corpului pot fi de trei tipuri:

1. *Forțele externe* acționează din exterior asupra părților componente ale corpului.

Se poate da ca exemplu forța gravitațională sau forța electrostatică ce se manifestă între două corpuri încărcate. Aceste forțe sînt vectori spațiali și sînt funcție de poziție. Dacă $\mathbf{f}_e$ este forța externă ce acționează asupra unității de masă, atunci forța externă ce acționează asupra volumului V va fi:

$$\mathbf{F}_e = \iiint_V \rho \, \mathbf{f}_e \, dV \tag{1.81}$$

2. *Forțele interne* sau *mutuale* iau naștere în interiorul corpului între elementele care formează mediul continuu. Ele sînt supuse principiului acțiunii și reacțiunii. Se poate imagina, de exemplu, un corp încărcat pe o porțiune cu o sarcină electrostatică pozitivă iar cealaltă parte cu o sarcină negativă. Forțele interne ca și cele externe sînt vectori spațiali funcție de poziție. Notînd cu $\mathbf{f}_i$ forța internă ce acționează asupra unității de masă, se poate scrie forța totală ce acționează asupra corpului:

$$\mathbf{F}_i = \iiint_V \rho \, \mathbf{f}_i \, dV \tag{1.82}$$

3. *Forțele de contact* sau *de suprafață* se exercită asupra suprafețelor corpului considerat și provin din contactul suprafeței cu alte corpuri. Dacă τ este efortul unitar sau tensiunea, atunci forța totală ce acționează asupra suprafeței va fi:

$$\mathbf{F}_s = \iint_A \tau \, dA \tag{1.83}$$

Sub acțiunea unei forțe sau a unui sistem de forțe un corp este adus în stare de mișcare. În cazul corpurilor rigide starea de mișcare constă din translații sau rotații. Corpurile solide deformabile, și în special lichidele și gazele, în condiții de mișcare se deformează modificîndu-și forma sau (și) volumul. Deformarea este caracterizată de modificări ale distanței între elementele constituente ale corpului. Corpurile solide, lichide și gazoase se diferențiază sub aspectul proprietăților, dar privite prin ipoteza continuului, ele au o teorie matematică comună.

Scanned with OKEN Scanner

1.3.1. ECUAȚII DE CONSERVARE

Prin aplicarea principiului conservării masei, a principiului conservării impulsului, a momentului impulsului și a principiului conservării energiei, se obține ecuația continuității mișcării, ecuațiile mișcării, ecuația momentului impulsului și, respectiv, ecuația energiei. Aceste ecuații sînt valabile pentru toate corpurile, independent de starea de agregare și de comportarea lor sub acțiunea solicitărilor.

1.3.1.1. Ecuația continuității

Este o exprimare matematică a principiului conservării masei. Masa unui corp este independentă de timp. Urmărind mișcarea unei porțiuni dintr-un corp, masa acestuia este egală cu

$$M = \iiint_V \rho \mathrm{d}\, V \tag{1.84}$$

în care ρ este densitatea corpului și V volumul porțiunii din corp, limitat de o suprafață de control într-o configurație oarecare (v. fig. 1.6). Principiul conservării masei presupune

$$\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t} \equiv \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \iiint_V \rho \mathrm{d}V = 0 \tag{1.85}$$

Operația de derivare se efectuează sub semnul integralei, făcînd uz de formula Gauss-Ostrogradskii:

$$\iiint_V \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho \mathbf{v}) \right] \mathrm{d}V = 0 \tag{1.86}$$

Relația fiind valabilă pentru orice volum, se obține, în final, ecuația continuității:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla (\rho \mathbf{v}) = 0 \tag{1.87}$$

Produsul $\rho \mathbf{v}$ este un vector și reprezintă fluxul masic unitar * ce trece prin unitatea de suprafață, normală la direcția de mișcare în unitate de timp.

În tabelul 1.5 este dată ecuația continuității în trei sisteme de coordonate.

---

* În cazul curgerii fluidelor este denumit flux hidraulic specific, flux unitar, debit specific sau viteză masică.

Scanned with OKEN Scanner

Tabelul 1.5

Ecuația continuității

Coordonate	Forma ecuației
Rectangulare carteziene	$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z} = 0$
Cilindrice	$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial(\rho r v_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial(\rho v_\theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z} = 0$
Sferice	$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial(\rho r^2 v_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial(\rho v_\theta \sin\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial(\partial v_\varnothing)}{\partial \varnothing} = 0$

Prin diferențierea și gruparea termenilor ce conțin derivatele densității, ecuația (1.87) devine:

$$\frac{D\rho}{dt} + \rho(\nabla \cdot \mathbf{v}) = 0 \qquad (1.88)$$

în care $D\rho/dt$ reprezintă derivata substanțială a densității.

Pentru un fluid necompresibil cu densitate constantă în timp și în spațiul de curgere, din ecuația (1.87) sau (1.88) se obține:

$$(\nabla \cdot \mathbf{v}) = 0 \qquad (1.89)$$

valabilă pentru mișcarea izocoră.

1.3.1.2. Ecuațiile impulsului

Mecanica mediilor continui plecînd de la niște teoreme universale [8], principii sau legi [21], stabilește un grup de ecuații diferențiale cu derivate parțiale de o mare importanță teoretică și practică. Astfel se obțin ecuațiile impulsului și se demonstrează simetria tensorului tensiunilor. Ele se bazează pe legea impulsului și a momentului cantității de mișcare.

Între legile universale ale mecanicii clasice figurează *legea impulsului, prima lege a lui Euler* [21] sau *teorema cantității de mișcare* [8].Conform celui de al doilea principiu al lui Newton:

$$\mathbf{F} = M \cdot \mathbf{a} = \frac{d(M \cdot \mathbf{v})}{dt} \qquad (1.90)$$

Scanned with OKEN Scanner

Produsul $M \cdot \mathbf{v}$ reprezintă un vector, întrucît M este constant și poartă denumirea de *cantitate de mișcare* sau *impuls*. Derivata impulsului este egală cu forța.

Se consideră un volum V de masă M, mărginit în interiorul unui corp C de o suprafață de control A (v. fig. 1.6). Asupra corpului acționează forțe de diverse tipuri care produc mișcare. Prima lege a lui Euler stabilește că *viteza de modificare a impulsului masei M în raport cu un sistem de coordonate fix este egală cu suma forțelor ce acționează asupra acesteia.* Luînd în considerație tipurile de forțe discutate anterior, legea lui Euler se poate exprima sub forma:

$$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{d}t} \iiint_V \rho \mathbf{v} \cdot \mathrm{d}V = \iiint_V \rho(\mathbf{f}_e + \mathbf{f}_i)\, \mathrm{d}V + \iint_A \tau\, \mathrm{d}A \tag{1.91}$$

În cele mai multe cazuri forțele interne $\mathbf{f}_i$ pot fi neglijate, rămînînd a fi luate în considerație numai forțele externe $\mathbf{f}_e$ raportate la unitatea de masă. Se ține cont că masa este constantă și după aplicarea transformatei Green, ecuația (1.91) devine:

$$\iiint_V \left(\rho \frac{\mathrm{D} \cdot \mathbf{v}}{\mathrm{d}t} - \nabla \cdot \tau - \rho \mathbf{f}_e \right) \mathrm{d}V = 0 \tag{1.92}$$

Ecuația (1.92) este valabilă pentru o porțiune arbitrară dintr-un corp, porțiune ce poate fi foarte mare sau foarte mică, ceea ce conduce la

$$\nabla \cdot \tau + \rho\, \mathbf{f}_e = \rho\, \frac{\mathrm{D} \cdot \mathbf{v}}{\mathrm{d}t} \tag{1.93}$$

În ultima ecuație τ reprezintă tensorul tensiunilor. Ecuația reprezintă bilanțul impulsului care trebuie să fie satisfăcut în orice punct al corpului și poartă denumirea de ecuația tensorială a impulsului sau a mișcării mediilor continui sau *prima lege a lui Cauchy* [21].

Aplicarea ecuației (1.93) la un corp în echilibru, pentru care forțele de inerție sînt neglijabile, conduce la anularea termenului din partea dreaptă. Se obține ecuația tensorială de echilibru a mediilor continui:

$$\nabla \tau + \rho\, \mathbf{f}_e = 0 \tag{1.94}$$

Componentele ecuației de echilibru (1.93), în forma scalară, în coordonate carteziene rectangulare, cilindrice și sferice, sînt date în tabelul 1.6. Aceleași ecuații, dacă se egalează cu produsul dintre densități și accelerație, reprezintă componentele ecuației mișcării (1.93) în forma scalară. Ele sînt valabile pentru mediile continui și sînt independente de starea de agregare. Notațiile sînt date în figura 1.7.

Scanned with OKEN Scanner

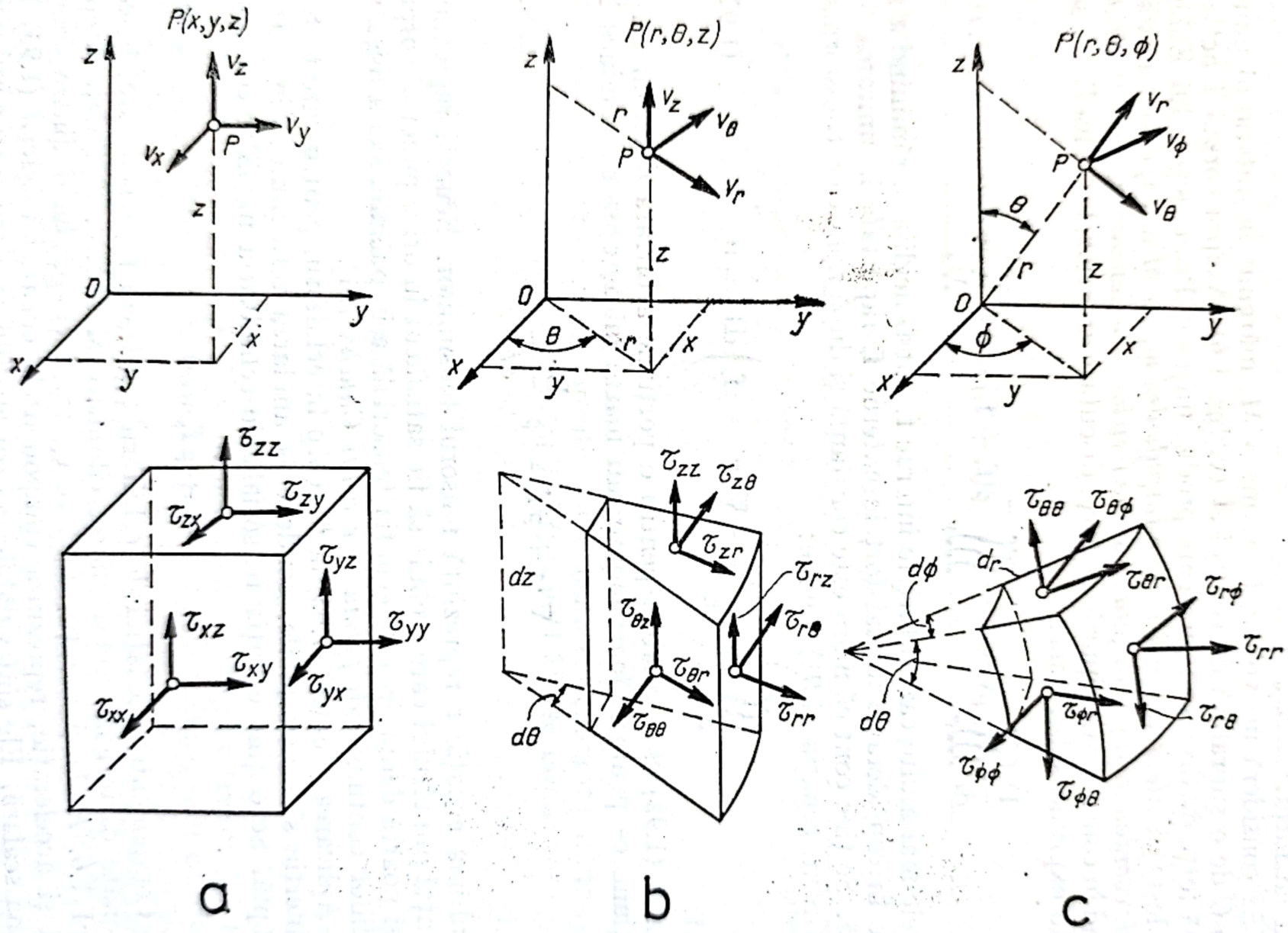


Fig. 1.7. Componentele tensiunii și ale vitezei în coordonate rectangulare, cilindrice și sferice.

Tabelul 1.6

Componentele ecuației de conservare a impulsului

Coordonate	Componenta	Forma ecuației
Rectangulare carteziene	x	$\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + \rho f_x = \rho\left(\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z}\right)$
	y	$\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + \rho f_y = \rho\left(\frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z}\right)$
	z	$\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} + \rho f_z = \rho\left(\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z}\right)$
Cilindrice	r	$\frac{\partial \tau_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{zr}}{\partial z} + \frac{1}{r}(\tau_{rr} - \tau_{\theta\theta}) + \rho f_r = \rho\left(\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta^2}{r} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z}\right)$
	θ	$\frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \tau_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial z} + \frac{1}{r}\tau_{r\theta} = \rho f_r = \rho\left(\frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r v_\theta}{r} + v_z \frac{\partial v_\theta}{\partial z}\right)$
	z	$\frac{\partial \tau_{zr}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} + \frac{1}{r}\tau_{zr} + \rho f_z = \rho\left(\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_z}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z}\right)$

Scanned with OKEN Scanner

Tabelul 1.6 (continuare)

Coordonate	Componente	Forma ecuației
Sferice	r	$\frac{\partial \tau_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta}\frac{\partial \tau_{\varnothing r}}{\partial \varnothing} + \frac{1}{r}(2\tau_{rr} - \tau_{\theta\theta} - \tau_{\varnothing\varnothing} - \tau_{r\theta} \operatorname{ctg} \theta) + \rho f_r = \rho\left(\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{v_\varnothing}{r \sin \theta}\frac{\partial v_r}{\partial \varnothing} - \frac{v_\theta^2 + v_\varnothing^2}{r}\right)$
	θ	$\frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \tau_{\theta\theta}}{\partial \varnothing} - \frac{1}{r \sin \theta}\frac{\partial \tau_{\theta\varnothing}}{\partial \varnothing} + \frac{1}{r}[\tau_{\theta\theta} - \tau_{\varnothing\varnothing}) \operatorname{ctg} \theta + 3\tau_{r\theta}] + \rho f_\theta = \rho\left(\frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_\varnothing}{r \sin \theta}\frac{\partial v_\theta}{\partial \varnothing} + \frac{v_r v_\theta}{r} - \frac{v_\varnothing^2}{r} \operatorname{ctg} \theta\right)$
	$\varnothing$	$\frac{\partial \tau_{\varnothing r}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \tau_{\theta\varnothing}}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta}\frac{\partial \tau_{\varnothing\varnothing}}{\partial \varnothing} + \frac{1}{r}(2\tau_{\theta\varnothing} \operatorname{ctg} \theta + 3\tau_{\varnothing r}) + \rho f_\varnothing = \rho\left(\frac{\partial v_\varnothing}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\varnothing}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_\varnothing}{\partial \theta} + \frac{v_\varnothing}{r \sin \theta}\frac{\partial v_\varnothing}{\partial \varnothing} + \frac{v_\varnothing v_r}{r} + \frac{v_\theta v_\varnothing}{r} \operatorname{ctg} \theta\right)$

1.3.1.3. Ecuația momentului impulsului

A doua lege a lui Cauchy [21], *legea momentului cantității de mișcare* sau *teorema momentului cinetic* [8], constituie una dintre legile de bază ale mecanicii clasice. Momentul $\mathbf{F} \times \mathbf{r}$ al forței $\mathbf{F}$, aplicate masei M față de punctul fix O (v. fig. 1.6) se obține din ecuația (1.90) prin înmulțire cu vectorul de poziție $\mathbf{r}$:

$$\mathbf{F} \times \mathbf{r} = M\mathbf{a} \times \mathbf{r} = \frac{\mathrm{d}(M\mathbf{v} \times \mathbf{r})}{\mathrm{d}t} \tag{1.95}$$

Scanned with OKEN Scanner

Produsul vectorial $M\mathbf{v}\times\mathbf{r}$ se numește *moment cinetic* sau *momentul impulsului* în raport cu originea O. Derivata momentului cinetic față de un punct fix este egală cu momentul forței față de acel punct.

A doua lege a lui Euler precizează că *viteza de modificare a momentului cantității de mișcare a masei M, în raport cu un sistem de referință fix, este egală cu suma momentelor tuturor forțelor ce acționează asupra ei.* Prin analogie cu ecuațiile (1.91) și (1.94), legea a doua a lui Euler va avea forma:

$$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{d}t}\iiint_V \rho(\mathbf{v}\times\mathbf{r})\,\mathrm{d}V = \iiint_V \rho(\mathbf{f}_e\times\mathbf{r})\,\mathrm{d}V + \iint_A (\tau\times\mathbf{r})\,\mathrm{d}A \qquad (1.96)$$

După aplicarea ecuației continuității [v. ec. (1.87)] și a transformatei Green, din ultima ecuație se obține:

$$\tau_{ij} = \tau_{ji} \qquad (1.97)$$

care reprezintă *a doua lege a mișcării, a doua lege a lui Cauchy* [21] *legea de reciprocitate* sau *de dualitate a tensiunilor tangențiale.*

Ecuația (1.97) demonstrează că tensorul tensiunilor este simetric, ceea ce înseamnă că numai șase tensiuni sînt independente: trei tensiuni normale și trei tensiuni tangențiale. Starea de tensiune a mediului continuu, în orice punct al său, este caracterizată de șase tensiuni independente, acționînd pe trei fețe ortogonale.

Ecuațiile (1.96) și (1.97) sînt valabile pentru corpurile nepolare pentru care dipolmomentul este egal cu zero. Acțiunile de torsionare a corpului sînt numai rezultatul acțiunii unor forțe de tipul celor discutate în subcapitolul 1.3.

1.3.1.4. Ecuația energiei

Aplicarea principiului conservării masei, impulsului și momentului a condus la ecuația continuității și, respectiv, la ecuațiile mișcării. Acest grup de ecuații poate fi utilizat la analiza deformării mediilor continui, dar numai în condiții izoterme. Analiza proceselor în sisteme neizoterme se poate efectua dacă grupul de ecuații discutate anterior se completează cu ecuația energiei obținută pe baza principiului conservării energiei.

Părțile componente ale unui corp pot primi energie, independent, de la diverse părți ale mediului înconjurător. Se pot transmite trei tipuri de energie:

— *Energia externă* se transmite din exteriorul corpului. Un exemplu este căldura pe care o primește pămîntul de la soare. Notînd cu e_e cantitatea de energie externă transmisă de mediul înconjurător în unitatea

Scanned with OKEN Scanner

de timp la o unitate de masă, se poate calcula energie primită de porțiunea dintr-un corp de volum V și masă M (v. fig. 1.6):

$$E_e = \iiint_V \rho e_e \cdot \mathrm{d}V \tag{1.98}$$

— *Energia internă sau mutuală* este aceea ce se transmite între diferite părți ale aceluiași corp. De exemplu, căldura transmisă prin radiație în masa unui gaz fierbinte. Energia transmisă unității de masă în unitatea de timp fiind e_i, energie transmisă volumului V va fi:

$$E_i = \iiint_V \rho e_i \cdot \mathrm{d}V \tag{1.99}$$

— *Energia de contact sau de suprafață* se transferă prin suprafața materialelor în așa fel încît poate fi echivalată cu energia internă ce se transmite de la o parte a corpului la o altă parte. Se dă ca exemplu căldura ce se transmite prin conductivitate termică de la un perete cald la un perete rece. Fluxul de energie transmis prin unitatea de suprafață în unitatea de timp fiind e_s, energia primită prin toată suprafața A a volumului considerat (v. fig. 1.6) este dată de:

$$E_s = \iint_A e_s \cdot \mathrm{d}A \tag{1.100}$$

Modificarea în timp a energiei interne și cinetice a unui corp, în raport cu un sistem de coordonate fix, este egală cu suma între lucrul forțelor ce acționează asupra sa și energia transmisă corpului. Bilanțul tuturor energiilor, referitor la un corp de volum V, cu suprafața de control A, este:

$$\frac{D}{\mathrm{d}t} \iiint_V \rho \left(U + \frac{1}{2} v^2 \right) \mathrm{d}V = \iint_A \mathbf{v}(\boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\delta}_n)\, \mathrm{d}A + \iiint_V \rho \left[\mathbf{v}(\mathbf{f}_e + \mathbf{f}_i) \right] \mathrm{d}V + \iint_A e_s \cdot \mathrm{d}A + \iiint_V \rho (e_e + e_i)\, \mathrm{d}V \tag{1.101}$$

în care U este energia internă raportată la unitatea de masă, $\boldsymbol{\tau}$ este tensorul tensiunilor, $\boldsymbol{\delta}_n$ vectorul unitar normal la suprafața de control, $\mathbf{f}_e$ și $\mathbf{f}_i$ forța externă respectiv internă, raportate la unitatea de masă și e_s, e_e și e_i sînt energia de suprafață, energia externă și respectiv internă transmise unității de masă în unitatea de timp.

Primul termen din partea dreaptă a ecuației (1.101) reprezintă lucrul primit de corp prin forțele de suprafață ale mediului înconjurător,

Scanned with OKEN Scanner

Tabelul 1.7

Ecuația energiei [2]

Coordonate	Forma ecuației
Rectangulare carteziene	$\rho c_v\left(\frac{\partial T}{\partial t}+v_x\frac{\partial T}{\partial x}+v_y\frac{\partial T}{\partial y}+v_z\frac{\partial T}{\partial z}\right)=-\left[\frac{\partial q_x}{\partial x}+\frac{\partial q_y}{\partial y}+\frac{\partial q_z}{\partial z}\right]-$ $-T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_\rho\left(\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}+\frac{\partial v_z}{\partial z}\right)+\left\{\tau_{xx}\frac{\partial v_x}{\partial x}+\tau_{yy}\frac{\partial v_y}{\partial y}+\tau_{zz}\frac{\partial v_z}{\partial z}\right\}+$ $+\left\{\tau_{xy}\left(\frac{\partial v_x}{\partial y}+\frac{\partial v_y}{\partial x}\right)+\tau_{xz}\left(\frac{\partial v_x}{\partial z}+\frac{\partial v_z}{\partial x}\right)+\tau_{yz}\left(\frac{\partial v_y}{\partial z}+\frac{\partial v_z}{\partial y}\right)\right\}+\rho e$
Cilindrice	$\rho c_v\left(\frac{\partial T}{\partial t}+v_r\frac{\partial T}{\partial r}+\frac{v_\theta}{r}\frac{\partial T}{\partial \theta}+v_z\frac{\partial T}{\partial z}\right)=-\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rq_r)+\frac{1}{r}\frac{\partial q_\theta}{\partial \theta}+\right.$ $\left.+\frac{\partial q_z}{\partial z}\right]-T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_\rho\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rv)_r+\frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta}+\frac{\partial v_z}{\partial z}\right)+\left\{\tau_{rr}\frac{\partial v_r}{\partial r}+\right.$ $\left.+\tau_{\theta\theta}\frac{1}{r}\left(\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta}+v_r\right)+\tau_{zz}\frac{\partial v_z}{\partial z}\right\}+\left\{\tau_{r\theta}\left[r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{v_\theta}{r}\right)+\frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \theta}\right]+\right.$ $\left.+\tau_{rz}\left(\frac{\partial v_z}{\partial r}+\frac{\partial v_r}{\partial z}\right)+\tau_{\theta z}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial v_z}{\partial \theta}+\frac{\partial v_\theta}{\partial z}\right)+\rho e\right.$
Sferice	$\rho c_v\left(\frac{\partial T}{\partial t}+v_r\frac{\partial T}{\partial r}+\frac{v_\theta}{r}\frac{\partial T}{\partial \theta}+\frac{v_\varnothing}{r\sin\theta}\frac{\partial T}{\partial \varnothing}\right)=-\left[\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2q_r)+\right.$ $\left.+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}(q_\theta\sin\theta)+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial q_\varnothing}{\partial \varnothing}\right]-T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_\rho\left(\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2v_r)+\right.$ $\left.+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}(v_\theta\sin\theta)+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial v_\varnothing}{\partial \varnothing}\right)+\left\{\tau_{rr}\frac{\partial v_r}{\partial r}+\tau_{\theta\theta}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta}+\right.\right.$ $\left.\frac{v_r}{r}\right)+\tau_{\varnothing\varnothing}\left(\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial v_\varnothing}{\partial \varnothing}+\frac{v_r}{r}+\frac{v_\theta\operatorname{ctg}\theta}{r}\right\}+\left\{\tau_{r\theta}\left(\frac{\partial v_\theta}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \theta}-\right.\right.$ $\left.-\frac{v_\theta}{r}\right)+\tau_{r\varnothing}\left(\frac{\partial v_\varnothing}{\partial r}+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial v_r}{\partial \varnothing}-\frac{v_\varnothing}{r}\right)+\tau_{\theta\varnothing}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial v_\varnothing}{\partial \theta}+\right.$ $\left.\left.\left.\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial v_\theta}{\partial \varnothing}-\frac{\operatorname{ctg}\theta}{r}v_\varnothing\right)\right\}+\rho e$

* Termenii din parantezele {} sînt asociați cu disiparea viscoasă și pot fi neglijați, cu excepția sistemelor cu gradienți de viteză mari.

Scanned with OKEN Scanner

iar al doilea termen lucrul primit prin forțele externe și interne. Al doilea termen reprezintă energia transmisă corpului din exterior prin suprafața de control. Termenul al patrulea însumează energia externă și internă pe care o primește corpul.

După mai multe transformări, ecuația (1.101) conduce la o formă diferențială:

$$\rho \frac{\mathrm{D}}{\mathrm{d}t}\left(U+\frac{1}{2}v^2\right) = -\nabla \mathbf{q} + (\tau \cdot \mathbf{v}) + \rho(\mathbf{v} \cdot \mathbf{f}) + \rho e \qquad (1.102)$$

în care e este suma între energia externă și internă transmisă corpului pe unitatea de masă.

Această ecuație este bilanțul diferențial al energiilor, în forma cea mai generală, ce poate fi aplicat în orice punct al unui corp. Alte forme ale ecuației sînt date în [21].*

O altă formă a ecuației energiei, mult mai utilă în abordarea teoretică a problemelor de deformare (curgere) neizotermă, este exprimată în termeni de temperatură a corpului. Tabelul 1.7 prezintă ecuația energiei în formă scalară, în trei sisteme de coordonate, iar în tabelul 1.8 se dau componentele fluxului de energie q.

Tabelul 1.8

Componentele fluxului de energie q [2]

Coordonate	Componente		
	x, r	y, θ	$z, \varnothing$
Rectangulare carteziene	$q_x = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x}$	$q_y = -\lambda \frac{\partial T}{\partial y}$	$q_z = -\lambda \frac{\partial T}{\partial z}$
Cilindrice	$q_r = -\lambda \frac{\partial T}{\partial r}$	$q_\theta = -\lambda \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta}$	$q_z = -\lambda \frac{\partial T}{\partial z}$
Sferice	$q_r = -\lambda \frac{\partial T}{\partial r}$	$q_\theta = -\lambda \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta}$	$q_\varnothing = -\lambda \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial T}{\partial \varnothing}$

* v. tab. 5.6. 1 — 1, pag 301

Scanned with OKEN Scanner

Ecuația continuității, ecuațiile mișcării sau ale impulsului și ecuația energiei sînt valabile pentru deformarea tuturor corpurilor. Particularizarea lor la un caz concret se realizează cu ajutorul unor ecuații specifice corpului studiat, denumite *ecuații de comportare reologică* sau *ecuații constitutive* și cu ajutorul unei ecuații de stare.

1.3.2. RAMURILE MECANICII CONTINUULUI

Mecanica mediului continuu elaborează, pe baza celor mai generale principii, o teorie matematică unitară, finalizată sub forma unor ecuații diferențiale aplicabile corpurilor deformabile. Cu toate că prezintă proprietăți diferite, solidele deformabile, lichidele și gazele au o teorie matematică comună. Extinderea și particularizarea acestor rezultate la corpurile elastice, plastice și vîscoase revine unor discipline aparte: mecanica corpului elastic (teoria elasticității), mecanica corpului plastic (teoria plasticității) și mecanica fluidelor (hidromecanica și gazomecanica), (fig. 1.8). Aceste ramuri de știință cu conținut pur teoretic studiază problemele generale ale echilibrului și mișcării corpurilor. Baza teoretică oferită de ele este preluată și aplicată de un grup de discipline cu un pronunțat caracter ingineresc: rezistența materialelor, hidraulica și pneumatica.

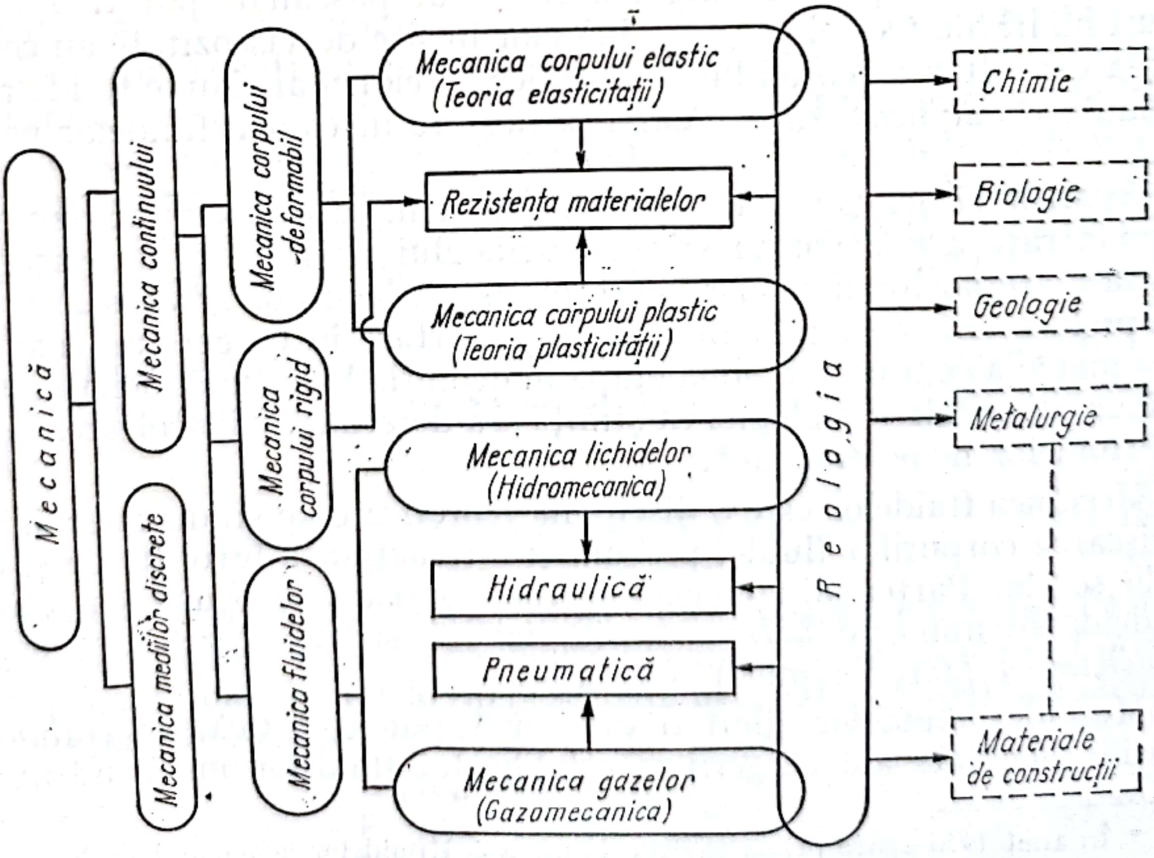


Fig. 1.8. Reologia și științele adiacente.

Scanned with OKEN Scanner

1.3.2.1. Mecanica fluidelor

Prin fluid (lichid sau gaz) se înțelege, în mod obișnuit, un mediu continuu deformabil, cu proprietatea *de a-și modifica continuu forma sub acțiunea unor forțe mici*. Această deformare continuă poartă denumirea de curgere. Mecanica fluidelor studiază mișcarea fluidelor ca „macrocorp" și nu se ocupă de mișcarea moleculelor și a atomilor.

Proprietatea maselor de fluid de a opune rezistență mică la divizare sau alunecare explică proprietățile de deformabilitate mare, mobilitate mare, fluiditate etc. În raport cu deformabilitatea lor, fluidele se împart în lichide, practic *incompresibile* și gaze *cu compresibilitate* foarte mare.

Teoria clasică a dinamicii fluidelor s-a dezvoltat prin studiile efectuate asupra unui *fluid ideal* sau „perfect", incompresibil și lipsit de viscozitate și elasticitate, denumit *fluidul lui Pascal*. Un astfel de fluid curge cu orice viteză pentru o tensiune egală cu zero.

Euler în sec. XVIII stabilește ecuațiile curgerii pentru această clasă de fluide. Rezultatele teoretice, pînă la introducerea conceptului de strat limită de către Prandtl, au avut o aplicabilitate limitată.

Teoria stratului limită consideră că efectele de frecare sînt concentrate într-un film subțire de fluid, situat în imediata vecinătate a frontierei solide. Curgerea în exteriorul stratului limită este lipsită de frecare și deci ecuațiile stabilite pentru curgerea fluidului pascalian pot fi aplicate. Totuși limitările teoriei curgerii fluidelor lipsite de vîscozitate au contribuit la dezvoltarea teoriei hidrodinamice a celor mai simple fluide reale, denumite *fluide newtoniene*. Astfel ia naștere mecanica fluidelor newtoniene.

Apariția și dezvoltarea unor noi industrii, ca de exemplu industria de prelucrare a maselor plastice, cauciucului și fibrelor sintetice, industria materialelor de construcție, industria lacurilor și vopselelor etc. care prelucrează materiale ale căror comportare în curgere nu mai este newtoniană, a condus la o nouă etapă în evoluția hidrodinamicii fluidelor, a impus constituirea reologiei ca știință și a determinat dezvoltarea mecanicii fluidelor nenewtoniene*.

Mecanica fluidelor este o disciplină teoretică care studiază echilibrul și mișcarea corpurilor fluide, precum și interacțiunea între fluide și corpurile solide. Partea din mecanica fluidelor care se ocupă cu studiul lichidelor se numește *hidromecanica*, iar cu studiul gazelor se ocupă *gazodinamica* (aerodinamica), (fig 1.8).

Mecanica fluidelor fiind o disciplină pur teoretică, ea stabilește ecuațiile generale ale curgerii și echilibrului fluidelor independent de

---

* În anul 1976 apare prima revistă de mecanica fluidelor nenewtoniene întitulată „Journal of non-newtonian fluid mechanics".

Scanned with OKEN Scanner

comportarea lor reologică. Două discipline: *hidraulica* și *pneumatica*, cu un pronunțat caracter ingineresc, preiau rezultatele teoretice ale hidrodinamicii, respectiv ale gazodinamicii și le aplică la cazurile concrete din practică.

Ecuația mișcării mediilor continui este valabilă pentru solide deformabile și fluide. Pentru fluide se folosește o altă formă a ecuației (1.93). Se definește un extratensor al tensiunilor τ'

$$\tau'_{ij} = \tau_{ij} + p\delta_{ij} \tag{1.103}$$

în care pentru fluide necompresibile p reprezintă presiunea medie [21]. De asemenea forța externă f_e raportată la unitatea de masă, se înlocuiește cu componentele accelerației gravitaționale. Se obțin ecuațiile de mișcare a fluidelor într-o formă utilă în abordarea teoretică a problemelor de curgere:

$$\rho\left(\frac{D\cdot\mathbf{v}}{dt}\right) = [\nabla\cdot\tau'] - \nabla p + \rho\mathbf{g} \tag{1.104}$$

Ecuațiile de mișcare a fluidelor, în formă scalară, sînt date în tabelul 1.9. Ele sînt valabile pentru toate fluidele independent de comportarea lor reologică. Particularizarea pentru un fluid cu o anumită comportare reologică se face cu ajutorul modelelor ce descriu această comportare, modele ce corelează tensiunea cu viteza de deformare. Stabilirea modelor reologice și a coeficienților ce-i includ formează obiectul reologiei.

Substituția ecuațiilor reologice a fluidului newtonian în ecuațiile de mișcare a fluidelor (v. tab. 1.9) conduce la ecuațiile curgerii fluidelor newtoniene cu densitate și viscozitate variabilă [2]. În tabelul 1.10 sînt date componentele în cordonate carteziene rectangulare. Aceste ecuații, completate cu ecuația de stare și ecuația de dependență a vîscozității de densitate, pot da de distribuția vitezelor într-un fluid în curgere izotermă.

Pentru fluide cu densitate și viscozitate constantă termenul $(\nabla\cdot\mathbf{v}) = 0$ și se obțin *ecuațiile Navier-Stokes* deduse în 1822 pe baza altor considerații.

$$\rho\frac{D\cdot\mathbf{v}}{dt} = -\nabla p + \eta\nabla^2\mathbf{v} + \rho\mathbf{g} \tag{1.105}$$

Setul complet al ecuațiilor Navier-Stokes este prezentat în tabelul 1.11.

Prin substituția ecuației reologice banale $\tau_{ij} = 0$ (pentru $(i \neq j)$, valabilă pentru fluide ideale de tip pascalian, în ecuația (1.104) sau făcînd $\eta = 0$ în ecuațiile Navier-Stokes, se obține:

$$\rho\frac{D\cdot\mathbf{v}}{dt} = -\nabla p + \rho\mathbf{g} \tag{1.106}$$

Scanned with OKEN Scanner

Tabelul 1.9

Ecuațiile de mișcare a fluidelor (conservare a impulsului)

Coordonate	Componenta	Forma ecuației
Rectangulare carteziene	x	$\rho\left(\frac{\partial v_x}{\partial t}+v_x\frac{\partial v_x}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_x}{\partial y}+v_z\frac{\partial v_x}{\partial z}\right)=-\frac{\partial p}{\partial x}-\left(\frac{\partial \tau'_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial \tau'_{yx}}{\partial y}+\frac{\partial \tau'_{zx}}{\partial z}\right)+\rho g_x$
	y	$\rho\left(\frac{\partial v_y}{\partial t}+v_x\frac{\partial v_y}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_y}{\partial y}+v_z\frac{\partial v_y}{\partial z}\right)=-\frac{\partial p}{\partial y}-\left(\frac{\partial \tau'_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial \tau'_{yy}}{\partial y}+\frac{\partial \tau'_{zy}}{\partial z}\right)+\rho g_y$
	z	$\rho\left(\frac{\partial v_z}{\partial t}+v_x\frac{\partial v_z}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_z}{\partial y}+v_z\frac{\partial v_z}{\partial z}\right)=-\frac{\partial p}{\partial z}-\left(\frac{\partial \tau'_{xz}}{\partial x}+\frac{\partial \tau'_{yz}}{\partial y}+\frac{\partial \tau'_{zz}}{\partial z}\right)+\rho g_z$
Cilindrice	r	$\rho\left(\frac{\partial v_r}{\partial t}+v_r\frac{\partial v_r}{\partial r}+\frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \theta}-\frac{v_\theta^2}{r}+v_z\frac{\partial v_r}{\partial z}\right)=-\frac{\partial p}{\partial r}-\left(\frac{1}{r}\frac{\partial(\tau'_{rr})}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial \tau'_{r\theta}}{\partial \theta}-\frac{\tau'_{\theta\theta}}{r}+\frac{\partial \tau'_{rz}}{\partial z}\right)+\rho g_r$
	θ	$\rho\left(\frac{\partial v_\theta}{\partial t}+v_r\frac{\partial v_\theta}{\partial r}+\frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta}+\frac{v_r v_\theta}{r}+v_z\frac{\partial v_\theta}{\partial z}\right)=-\frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial \theta}-\left(\frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2\tau'_{r\theta})}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial \tau'_{\theta\theta}}{\partial \theta}+\frac{\partial \tau'_{\theta z}}{\partial z}\right)+\rho g_\theta$
	z	$\rho\left(\frac{\partial v_z}{\partial t}+v_r\frac{\partial v_z}{\partial r}+\frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_z}{\partial \theta}+v_z\frac{\partial v_z}{\partial z}\right)-\frac{\partial p}{\partial z}+\left(\frac{1}{r}\frac{\partial(r\tau'_{rz})}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial \tau'_{\theta z}}{\partial \theta}+\frac{\partial \tau'_{zz}}{\partial z}\right)+\rho g_z$

Scanned with OKEN Scanner

Tabelul 1.9 (continuare)

Coordonate	Compo-nente	Forma ecuației
Sferice	r	$\rho\left(\frac{\partial v_r}{\partial t}+v_r\frac{\partial v_r}{\partial r}+\frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \theta}+\frac{v_\varnothing}{r\sin\theta}\frac{\partial v_r}{\partial \varnothing}-\frac{v_\theta^2+v_\varnothing^2}{r}\right.=$ $=-\frac{\partial p}{\partial r}-\left(\frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2\tau'_{rr})}{\partial r}+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial(\tau'r_\theta\sin\theta}{\partial\theta}+\right.$ $\left.+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\tau'_{r\varnothing}}{\partial\varnothing}-\frac{\tau'_{\theta\theta}+\tau'_{\varnothing\varnothing}}{r}\right)+\rho g_r$
	θ	$\rho\left(\frac{\partial v_\theta}{\partial t}+v_r\frac{\partial v_\theta}{\partial r}+\frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial\theta}+\frac{v_\varnothing}{r\sin\theta}\frac{\partial v_\theta}{\partial\varnothing}+\frac{v_r v_\theta}{r}-\frac{v_\varnothing^2\operatorname{ctg}\theta}{r}\right)=$ $=-\frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial\theta}-\left(\frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2\tau'_{r\theta})}{\partial r}+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial(\tau'_{\theta\theta}\sin\theta)}{\partial\theta}+\right.$ $\left.\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\tau'_{\theta\varnothing}}{\partial\varnothing}+\frac{\tau_{r\theta}}{r}-\frac{\tau'_{\varnothing\varnothing}\operatorname{ctg}\theta}{r}\right)+\rho g_\theta$
	$\varnothing$	$\rho\left(\frac{\partial v_\varnothing}{\partial t}+v_r\frac{\partial v_\varnothing}{\partial r}+\frac{v_\theta}{r}\frac{\partial V_\varnothing}{\partial\theta}+\frac{V_\varnothing}{r\sin\theta}\frac{\partial v_\varnothing}{\partial\varnothing}+\frac{v_\varnothing v_r}{r}+\right.$ $\left.+\frac{v_\theta v_\varnothing\operatorname{ctg}\theta}{r}\right)=-\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial p}{\partial\varnothing}-\left(\frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^3\tau'_{r\varnothing})}{\partial r}+\right.$ $\left.+\frac{1}{r}\frac{\partial\tau'_{\theta\varnothing}}{\partial\theta}+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\tau'_{\varnothing\varnothing}}{\partial\varnothing}+\frac{\tau'_{r\varnothing}}{r}+\frac{2\tau'_{\theta\varnothing}\operatorname{ctg}\theta}{r}\right)+\rho g_\varnothing$

Tabelul 1.10

Ecuațiile de curgere a fluidelor newtoniene *

Componenta	Forma ecuației (coordonate carteziene rectangulare)
x	$\rho\frac{Dv_x}{dt}=-\frac{\partial p}{\rho x}+\frac{\partial}{\partial x}\left[2\eta\frac{\partial v_x}{\partial x}-\frac{2}{3}\eta(\nabla\cdot v)\right]+\frac{\partial}{\partial y}\left[\eta\left(\frac{\partial v_x}{\partial y}+\right.\right.$ $\left.\left.+\frac{\partial v_y}{\partial x}\right)\right]+\frac{\partial}{\partial z}\left[\eta\frac{\partial v_z}{\partial x}+\frac{\partial v_x}{\partial z}\right)\Big]+\rho g_x$

Scanned with OKEN Scanner

Tabelul 1.10 (continuare)

Componenta	Forma ecuației (coordonate carteziene rectangulare)
y	$\rho \frac{Dv_y}{dt} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x}\left[\eta\left(\frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y}\right)\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[2\eta \frac{\partial v_y}{\partial y} - \frac{2}{3}\eta(\nabla \cdot v)\right] + \frac{\partial}{\partial z}\left[\eta\left(\frac{\partial v_z}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial z}\right)\right] + \rho g_y$
z	$\rho \frac{Dv_z}{dt} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial x}\left[\eta\left(\frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial z}\right)\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[\eta\left(\frac{\partial v_z}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial z}\right)\right] + \frac{\partial}{\partial z}\left[2\eta \frac{\partial v_z}{\partial z} - \frac{2}{3}\eta(\nabla \cdot v)\right] + \rho g_z$

* Coeficientul de viscozitate volumică η_v este neglijat.

În ecuații $(\nabla \cdot v) = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$

Tabelul 1.11

Ecuațiile Navier-Stokes [2]

Coordonate	Componente	Forma ecuației
Rectangulare carteziene	x	$\rho\left(\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial x}\right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \eta\left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2}\right) + \rho g_x$
	y	$\rho\left(\frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z}\right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \eta\left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2}\right) + \rho g_y$

Scanned with OKEN Scanner

Tabelul 1.11 (continuare)

Coordonate	Componenta	Forma ecuației
Rectangulare carteziene	z	$\rho\left(\frac{\partial v_z}{\partial t}+v_x\frac{\partial v_z}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_z}{\partial y}+v_z\frac{\partial v_z}{\partial z}\right)=-\frac{\partial p}{\partial z}+\eta\left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2}+\right.$ $\left.+\frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2}\right)+\rho g_z$
Cilindrice	r	$\rho\left(\frac{\partial v_r}{\partial t}+v_r\frac{\partial v_r}{\partial r}+\frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \theta}-\frac{v_\theta^2}{r}+v_z\frac{\partial v_r}{\partial z}\right)=-\frac{\partial p}{\partial r}+$ $+\eta\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\cdot v_r)\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_r}{\partial \theta^2}-\frac{2}{r^2}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta}+\frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2}\right]+\rho g_r$
	θ	$\rho\left(\frac{\partial v_\theta}{\partial t}+v_r\frac{\partial v_\theta}{\partial r}+\frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta}+\frac{v_r v_\theta}{r}+v_z\frac{\partial v_\theta}{\partial z}\right)=-\frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial \theta}+$ $+\eta\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\cdot v_\theta)\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_\theta}{\partial \theta^2}+\frac{2}{r^2}\frac{\partial v_r}{\partial \theta}+\frac{\partial^2 v_\theta}{\partial z^2}\right]+\rho g_\theta$
	z	$\rho\left(\frac{\partial v_z}{\partial t}+v_r\frac{\partial v_z}{\partial r}+\frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_z}{\partial \theta}+v_z\frac{\partial v_z}{\partial z}\right)=-\frac{\partial p}{\partial z}+$ $+\eta\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v_z}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_z}{\partial \theta^2}+\frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2}\right]+\rho g_z$
Sferice	r	$\rho\left(\frac{\partial v_r}{\partial t}+v_r\frac{\partial v_r}{\partial r}+\frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \theta}+\frac{v_\varnothing}{r\sin\theta}\frac{\partial v_r}{\partial \varnothing}-\frac{v_\theta^2+v_\varnothing^2}{r}\right)-$ $\frac{\partial p}{\partial r}+\eta\left[\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial v_r}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\frac{\partial v_r}{\partial \theta}\right)+\right.$ $+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 v_r}{\partial \varnothing^2}-\frac{2}{r^2}v_r-\frac{2}{r^2}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta}-\frac{2}{r^2}v_\theta\operatorname{ctg}\theta-$ $\left.-\frac{2}{r^2\sin\theta}\frac{\partial v_\varnothing}{\partial \varnothing}\right]+\rho g_r$

Scanned with OKEN Scanner

Tabelul 1.11 (continuare)

Coordonate	Componenta	Forma ecuației
Sferice	θ	$\rho\left(\frac{\partial v_\theta}{\partial t}+v_r\frac{\partial v_\theta}{\partial r}+\frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial\theta}+\frac{v_\varnothing}{r\sin\theta}\frac{\partial v_\theta}{\partial\varnothing}+\frac{v_r\cdot v_\theta}{r}-\right.$ $\left.-\frac{v_\varnothing^2\operatorname{ctg}\theta}{r}\right)=-\frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial\theta}+\eta\left[\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r^2}\left(r^2\frac{\partial v_\theta}{\partial r}\right)+\right.$ $+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial v_\theta}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 v_\theta}{\partial\varnothing^2}+\frac{2}{r^2}\frac{\partial v_r}{\partial\theta}-$ $\left.-\frac{v_\theta}{r^2\sin^2\theta}-\frac{2\cos\theta}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial v_\varnothing}{\partial\varnothing}\right]+\rho g_\theta$
	$\varnothing$	$\rho\left(\frac{\partial v_\varnothing}{\partial t}+v_r\frac{\partial v_\varnothing}{\partial r}+\frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_\varnothing}{\partial\theta}+\frac{v_\varnothing}{r\sin\theta}\frac{\partial v_\varnothing}{\partial\varnothing}+\frac{v_\varnothing v_r}{r}+\right.$ $\left.\frac{v_\theta v_\varnothing}{r}\operatorname{ctg}\theta\right)=-\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial p}{\partial\varnothing}+\eta\left[\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial v_\varnothing}{\partial r}\right)+\right.$ $+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial v_\varnothing}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 v_\varnothing}{\partial\varnothing^2}-\frac{v_\varnothing}{r^2\sin^2\theta}+$ $\left.+\frac{2}{r^2\sin\theta}\frac{\partial v_r}{\partial\varnothing}+\frac{2\cos\theta}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial v_\theta}{\partial\varnothing}\right]+\rho g_\varnothing$

care în formă scalară reprezintă *ecuațiile de curgere ale lui Euler* deduse în 1755. Ele pot fi aplicate la curgerea fluidelor, a căror efecte vîscoase pot fi neglijate.

Anularea componentelor vitezei în ultima ecuație conduce la

$$-\nabla p+\rho g=0 \tag{1.107}$$

ecuațiile de echilibru ale lui Euler, cu importante aplicații în hidrostatică.

1.3.2.2. Mecanica corpului elastic

Mecanica solidelor deformabile este o ramură a mecanicii, știință fundamentală a naturii, care se bazează pe o teorie matematică unitară. Ea studiază corpurile solide *elastice și plastice*. Metodele de calcul folo-

Scanned with OKEN Scanner

site sînt metode teoretice generale, ce, pe măsura posibilităților și necesităților, conduc la o rezolvare exactă a problemelor.

Teoria elasticității este o ramură a mecanicii solidelor deformabile. În domeniul ei intră studiul tuturor corpurilor solide, din punct de vedere al echilibrului și al mișcării, a căror defirmații, după suprimarea solicitărilor, sînt recuperabile.

Cu probleme similare se ocupă și *rezistența materialelor*, care, spre deosebire de mecanica corpului elastic, este o știință inginerească (v. fig. 1.8). Rezistența materialelor preia rezultatele teoretice ale mecanicii corpului elastic și plastic și, pe baza unor simplificări, le aplică în practică la cazuri concrete.

Așadar, teoria elasticității nu este o teorie matematică, ci o ramură a mecanicii. Teoria elasticității studiază problemele la limită pentru un anumit sistem de ecuații cu derivate parțiale. De exemplu, pentru descrierea procesului de deformare a unui corp elastic sînt necesare ecuațiile de conservare valabile pentru orice continuu, ecuația reologică caracteristică corpului studiat și condiții inițiale și de limită. Dar teoria elasticității studiază mediile continue deformabile atît din punct de vedere al echilibrului, cît și al mișcării lor.

Teoria elasticității, ca și mecanica fluidelor, face apel la reologie pentru a stabili ecuații diferențiale valabile pentru un anumit corp sau o clasă de corpuri. Plecînd de la ecuația mișcării (v. ec. 1.93 și tabelul 1.6) sau de la ecuația de echilibru a mediilor continue (v. ec. 1.94) și substituind eforturile unitare din legea generalizată a lui Hooke, se obțin ecuațiile diferențiale ale lui Lamé. Pentru condiții de echilibru rezultă [6]:

$$(\lambda_L + G)\,\nabla(\nabla \cdot \mathbf{X}) + G\nabla^2\mathbf{X} + \rho \mathbf{f}_e = 0 \qquad (1.108)$$

Componentele ecuației în coordonate rectangulare carteziene sînt prezentate în tabelul 1.12. Aceste ecuații sînt exprimate în deplasări X_i. Exprimarea lor funcție de eforturile unitare conduce la un grup de șase ecuații diferențiale, cunoscute sub denumirea de ecuațiile Beltrami-Mitchell [3,6], (tabelul 1.13).

Rezultă cu suficientă claritate că apelul mecanicii corpului elastic la reologie este indispensabil.

Legătura biunivocă între tensiuni și deformații specifice, exprimată matematic printr-o relație liniară sau neliniară, este oferită de reologie.* Aceste relații — modele reologice sau ecuații constitutive — nu au valabilitate generală; ele caracterizează comportarea unui singur corp sau a unei clase de corpuri. Relațiile liniare — legea lui Hooke — corespund

* Unii autori consideră că legea lui Hooke și legea lui Newton nu sînt ecuații reologice (constitutive).

Scanned with OKEN Scanner

Tabelul 1.12

Ecuațiile diferențiale Lamé (deformații elastice)

Componenta	Forma ecuației
x	$(\lambda_L + G)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z}\right) + G\left(\frac{\partial^2 X_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 X_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 X_x}{\partial z^2}\right) + \rho fx = 0$
y	$(\lambda_L + G)\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z}\right) + G\left(\frac{\partial^2 X_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 X_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 X_y}{\partial z^2}\right) + \rho fy = 0$
z	$(\lambda_L + G)\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z}\right) + G\left(\frac{\partial^2 X_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 X_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 X_z}{\partial z^2}\right) + \rho fz = 0$

Tabelul 1.13

Ecuațiile diferențiale Beltrami-Mitchell (deformații elastice)*

Componenta solicitării	Forma ecuației
τ_{xx}	$\frac{\partial^2 \tau_{xx}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tau_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \tau_{xx}}{\partial z^2} + \frac{1}{1+\mu}\left(\frac{\partial^2 \tau_{xx}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tau_{yy}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tau_{zz}}{\partial x^2}\right) + 2\frac{\partial(\rho fx)}{\partial x} + \frac{\mu}{1-\mu}\left[\frac{\partial(\rho fx)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho fy)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho fz)}{\partial z}\right] = 0$
τ_{yy}	$\frac{\partial^2 \tau_{yy}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tau_{yy}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \tau_{yy}}{\partial z^2} + \frac{1}{1+\mu}\left(\frac{\partial^2 \tau_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \tau_{yy}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \tau_{zz}}{\partial y^2}\right) + 2\frac{\partial(\rho fy)}{\partial y} + \frac{\mu}{1-\mu}\left[\frac{\partial(\rho fx)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho fy)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho fz)}{\partial z}\right] = 0$

Scanned with OKEN Scanner

Tabelul 1.13 (continuare)

Componenta solicitării	Forma ecuației
τ_{zz}	$\frac{\partial^2\tau_{zz}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\tau_{zz}}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\tau_{zz}}{\partial z^2}+\frac{1}{1+\mu}\left(\frac{\partial^2\tau_{xx}}{\partial z^2}+\frac{\partial^2\tau_{yy}}{\partial z^2}+\frac{\partial^2\tau_{zz}}{\partial z^2}\right)+ 2\frac{\partial(\rho fz)}{\partial z}+\frac{\mu}{1-\mu}\left[\frac{\partial(\rho fx)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho fy)}{\partial y}+\frac{\partial(\rho fz)}{\partial z}\right]=0$
$\tau_{xy}=\tau_{yx}$	$\frac{\partial^2\tau_{xy}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\tau_{xy}}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\tau_{xy}}{\partial z^2}+\frac{1}{1+\mu}\left[\frac{\partial^2\tau_{xx}}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2\tau_{yy}}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2\tau_{zz}}{\partial x\partial y}\right]+ +\frac{\partial(\rho fx)}{\partial y}+\frac{\partial(\rho fy)}{\partial x}=0$
$\tau_{yz}=\tau_{zy}$	$\frac{\partial^2\tau_{yz}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\tau_{yz}}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\tau_{yz}}{\partial z^2}+\frac{1}{1+\mu}\left[\frac{\partial^2\tau_{xx}}{\partial y\partial z}+\frac{\partial^2\tau_{yy}}{\partial y\partial z}+\frac{\partial^2\tau_{zz}}{\partial y\partial z}\right]+ +\frac{\partial(\rho fy)}{\partial z}+\frac{\partial(\rho fz)}{\partial y}=0$
$\tau_{zx}=\tau_{xz}$	$\frac{\partial^2\tau_{zx}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\tau_{zx}}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\tau_{zx}}{\partial z^2}+\frac{1}{1+\mu}\left[\frac{\partial^2\tau_{xx}}{\partial z\partial x}+\frac{\partial^2\tau_{yy}}{\partial z\partial x}+\frac{\partial^2\tau_{zz}}{\partial z\partial x}\right]+ +\frac{\partial(\rho fz)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho fx)}{\partial z}=0$

* Componentele tensorului deformație s-au folosit fără coeficientul 1/2.

suficient de bine unor corpuri elastice, conducînd la simplificări importante în calculul matematic. Comportările reologice mai complicate sînt descrise de ecuațiile neliniare, ceea ce conduce la teoria elasticității neliniare.

Teoria elasticității, în general, nu ține cont de viteza de deformare. Corpurile elastice ce posedă o componentă vîscoasă impun să se ia în considerație și variabila temporală. În felul acesta se studiază fenomenele de fluaj și relaxare.

Ecuațiile între tensiuni și deformații specifice se stabilesc pe baza a diferite considerente și ipoteze de natură energetică, termodinamică

Scanned with OKEN Scanner

etc., și depind de o serie de coeficienți de material. Valorile acestora se stabilesc pe cale experimentală.

La un corp elastic fenomenul de deformare este reversibil. Teoria elasticității studiază starea de solicitare a unui corp solid elastic, supus acțiunii unor sarcini exterioare, în echilibru static sau dinamic. De cele mai multe ori un corp poate fi considerat elastic numai pînă la o anumită valoare a solicitărilor sau pînă la o anumită valoare a deformațiilor specifice — denumită *limită de elasticitate* — peste care deformațiile devin parțial nerecuperabile. Astfel de corpuri se numesc elastoplastice. Mecanica corpului elastic studiază corpurile solide deformabile numai în domeniul elastic în care deformațiile sînt recuperabile.

1.3.2.3. Mecanica corpului plastic

Corpurile solide nu sînt elastice decît în domeniul solicitărilor mici. Peste o anumită limită a solicitărilor — *limită de elasticitate, limită de curgere sau prag de tensiune* — apar deformații nerecuperabile. Caracteristica principală a deformațiilor plastice este ireversibilitatea lor. De asemenea, pentru procesele referitoare la deformațiile plastice nu mai este valabilă corespondența biunivocă în relațiile dintre tensiuni și deformații. Corelațiile tensiune — deformare sînt diferite pentru procesul de încărcare și descărcare. În problemele teoriei plasticității trebuie precizată nu numai starea finală a solicitării, dar și istoria solicitărilor anterioare [13].

Mecanica corpului elastic întîmpină dificultăți mari cînd operează cu deformații finite. Teoria plasticității abordează problema deformațiilor finite ca și mecanica fluidelor, în care orice proces de curgere este legat de deformații mari. Deosebirea este datorată faptului că în teoria elasticității tensiunile depind de deformații, în timp ce în teoria plasticității tensiunile depind de vitezele de deformare. În definiția deformației starea actuală este comparată cu starea inițială, în timp ce viteza de deformare depinde numai de starea actuală și de starea vecină [13]. Observațiile sînt valabile numai în cazul teoriei curgerii plastice.

Comportarea plastică a corpurilor este foarte diferită și este influențată de temperatură. La temperatura mediului ambiant, oțelul și unele aliaje prezintă deformații independente de timp, pe cînd la temperaturi înalte deformațiile se amplifică în timp; are loc procesul de fluaj. Teoria plasticității studiază deformațiile plastice independente de timp [4].

Comportarea plastică a corpurilor se manifestă peste o anumită valoare a solicitărilor. Unele materiale în domeniul plastic se rigidizează, deci are loc *fenomenul de ecruisare*. Mecanica corpului plastic studiind răspunsul unei anumite categorii de corpuri la solicitările externe, sta-

Scanned with OKEN Scanner

bilește cîteva criterii numite condiții de plasticitate. Plasticizarea materialului este determinată de satisfacerea acestor criterii.

O condiție de plasticitate poate fi scrisă sub forma

$$f(\tau_{ij}) = 0 \tag{1.109}$$

unde funcția f este simetrică și astfel aleasă încît $f < 0$ să corespundă stărilor elastice sau rigide și $f = 0$ să corespundă stărilor plastice [13].

În domeniul plastic, starea de solicitare și curgere sau deformare este descrisă de ecuațiile teoriei plasticității. Sistemul de ecuații pentru acest caz este mult mai complicat. Substituind ecuația reologică a corpului perfect plastic [4] în ecuațiile de echilibru [v. ec. 1.94), se obțin ecuațiile diferențiale ale curgerii plastice:

$$E_v(\nabla \cdot \gamma_v) + 2\dot{\tau}_0 [\nabla \cdot (\gamma'/\Gamma)]_{x,y,z} + \rho f_e = 0 \tag{1.110}$$

în care E_v este modulul de elasticitate volumică, τ_0 pragul de curgere, γ' componentele deviatorului deformațiilor (v. ec. 1.43) și Γ intensitatea deformațiilor de forfecare, dată de expresia

$$\Gamma = \sqrt{\frac{2}{3}(\gamma_{xx} - \gamma_{yy})^2 + (\gamma_{yy} - \gamma_{zz})^2 + (\gamma_{zz} - \gamma_{xx})^2 + \frac{3}{2}(\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2)} \tag{1.111}$$

Componentele ecuației curgerii plastice sînt trecute în tabelul 1.14.

Pentru starea de ecruisare ecuațiile vor avea altă formă deoarece comportarea reologică a plasticului ecruisabil este descrisă de o altă ecuație constitutivă. De asemenea, ecuațiile diferențiale ale curgerii plastice pot fi exprimate în termeni de tensiuni, în formă analogă cu ecuațiile Beltrami-Mithell din teoria elasticității [4].

1.4. MECANICA MOLECULARĂ

După cum s-a menționat, mecanica continuului face abstracție de structura corpului studiat. Dar orice corp are o structură bine determinată. Structura moleculară și supramoleculară influențează hotărîtor proprietățile și comportarea corpului la solicitări externe. De exemplu, un oțel de o anumită compoziție chimică poate avea proprietăți diferite funcție de structură, sau proprietățile unui polimer în stare cristalină diferă de proprietățile aceluiași polimer în stare amorfă. Doi compuși

Scanned with OKEN Scanner

Tabelul 1.14

Ecuațiile diferențiale ale curgerii plastice

Componenta	Forma ecuației
x	$2\tau_0\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\gamma_{xx}}{\Gamma}-\frac{1}{3}\frac{\gamma_v}{\Gamma}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\gamma_{yx}}{\Gamma}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\gamma_{zx}}{\Gamma}\right)\right]+E_v\frac{\partial\gamma_v}{\partial x}+$ $+\rho fx=\rho\frac{Dv_x}{dt}$
y	$2\tau_0\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\gamma_{xy}}{\Gamma}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\gamma_{yy}}{\Gamma}-\frac{1}{3}\frac{\gamma_v}{\Gamma}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\gamma_{zy}}{\Gamma}\right)\right]+E_v\frac{\partial\gamma_v}{\partial y}+$ $+\rho fy=\rho\frac{Dv_y}{dt}$
z	$2\tau_0\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\gamma_{xz}}{\Gamma}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\gamma_{yz}}{\Gamma}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\gamma_{zz}}{\Gamma}-\frac{1}{3}\frac{\gamma_v}{\Gamma}\right]+E_v\frac{\partial\gamma_v}{\partial z}+$ $+\rho fz=\rho\frac{Dv_z}{dt}$

* Semnificația unor notații:

$$\Gamma=\sqrt{\frac{2}{3}}\sqrt{(\gamma_{xx}-\gamma_{yy})^2+(\gamma_{yy}-\gamma_{zz})^2+(\gamma_{zz}-\gamma_{xx})^2+\frac{3}{2}(\gamma_{xy}^2+\gamma_{yz}^2+\gamma_{yx}^2)}$$

și

$$\gamma_v=\gamma_{xx}+\gamma_{yy}+\gamma_{zz}$$

macromoleculari, cu aceeași structură cristalină vor avea proprietăți diferite, dependente de structura moleculară.

Pe baza principiilor de conservare, mecanica continuului stabilește ecuații valabile pentru toate corpurile. Particularizarea lor la corpurile cu un anumit tip de comportare reologică se face cu ajutorul ecuațiilor constitutive de comportare reologică sau de stare reologică*. Teoria moleculară a reologiei polimerilor [10] sau microreologia polimerilor [14], ca ramură a mecanicii moleculare, explică și corelează diversele tipuri de răspunsuri ale corpurilor la solicitările externe, pe baza structurii

* În cadrul acestei lucrări se va utiliza cel mai frecvent denumirea de ecuații de comportare reologică sau ecuații reologice.

Scanned with OKEN Scanner

moleculare și supramoleculare sau, mai general, pe baza structurii fizice și chimice a sistemului.

În ultimele două decenii numeroase studii au recurs la modele matematice ale structurii macromoleculelor, în condiții statice și dinamice, în scopul stabilirii ecuațiilor reologice. Legitățile stabilite între structură, comportare reologică și coeficienții de material ce afectează funcția răspuns, permit în prezent, ca în multe cazuri, să se poată determina structura, schimbările de structură și configurația polimerilor pe baza unor determinări reologice.

Făcînd referiri numai la complexitatea comportării reologice a sistemelor polimere, răspunsul la solicitări ale unui anumit sistem poate fi prevăzut numai dacă se ia în considerație multitudinea factorilor de influență: mărimea solicitării, scara de timp și istoria solicitărilor, temperatura, gradul de polimerizare, masa molară a monomerului, concentrația și proprietățile componenților (în cazul soluțiilor și a sistemelor eterogene) etc. Ținînd cont de acești factori, reologia stabilește ecuații utile în abordarea proceselor de deformare și curgere, specifice operațiilor de prelucrare sau condițiilor de utilizare a produselor finite. În același timp, reologia oferă mijloace de investigație altor științe. De exemplu, prin determinarea proprietăților reologice a soluțiilor diluate de polimeri, pot fi stabilite particularitățile structurale ale macromoleculelor (forma, dimensiunea medie, masa molară medie), precum și caracteristicile termodinamice.

Pe baza teoriei continuului se pot stabili ecuațiile de comportare reologică, iar coeficienții de material din aceste ecuații se determină pe cale experimentală. Atunci cînd se deduce intuitiv se anticipează comportarea sau se urmărește explicarea mecanismului comportării reologice a unui anumit corp, se face apel la reologia moleculară, pe baza unei analogii între structură și comportarea reologică. Din aceste puncte de vedere, atît mecanica continuului cît și mecanica moleculară oferă reologiei mijloacele de investigație. Studiile de reologia compușilor macromoleculari sînt abordate de pe ambele poziții: se consideră corpul un continuu, ignorîndu-se structura moleculară, iar comportarea reologică este prezisă și explicată pe baza structurii moleculare.

1.5. REOLOGIA ȘI ȘTIINȚELE ADIACENTE

În anul 1929 Societatea americană de reologie acceptă definiția dată de E C. Bingham *„reologia este studiul deformării și curgerii materiei"*. Cu studiul curgerii și deformării corpurilor, însă, se ocupă și alte științe

Scanned with OKEN Scanner

care derivă din ramura de bază a fizicii: mecanica. Cele mai importante sînt: mecanica corpului elastic, mecanica corpului plastic, mecanica fluidelor, rezistența materialelor, hidraulica și pneumatica. În astfel de condiții se cere lămurit care este obiectul acestor științe și care este obiectul reologiei?

1.5.1. ȘTIINȚELE ADIACENTE

Din mecanică, știință fundamentală și ramură a fizicii, derivă toate științele ce se ocupă cu studiul mișcării corpului rigid sau cu studiul deformării și curgerii corpurilor (fig. 1.8). Ramurile principale ale mecanicii:

— mecanica mediilor discrete și
— mecanica mediilor continue

studiază mișcarea punctelor și a sistemelor de puncte materiale, respectiv deformarea și curgerea corpurilor. Mecanica continuului se subdivide la rîndul său în trei ramuri:

— mecanica corpului rigid;
— mecanica corpului solid deformabil;
— mecanica fluidelor.

Mecanica corpului rigid abordează problemele teoretice referitoare la mișcarea de rotație și translație. Ea nu poate fi încadrată în ramura științelor ce studiază deformarea corpurilor. Mecanica corpului deformabil și mecanica fluidelor sînt discipline care studiază problemele generale ale echilibrului și mișcării corpurilor solide, respectiv fluide, precum și acțiunea reciprocă dintre solide sau solide și fluide aflate în stare de mișcare sau de repaus. Cînd obiectul studiului este limitat la corpuri elastice sau plastice, mecanica corpului solid deformabil se subdivide în:

— mecanica corpului elastic (teoria elasticității) și
— mecanica corpului plastic (teoria plasticității).

Analog, funcție de starea de agregare a fluidului studiat, mecanica fluidelor se împarte în:

— mecanica lichidelor (hidromecanica) și
— mecanica gazelor (gazomecanica).

O a doua clasificare a mecanicii fluidelor, în:

— hidrostatica — aerostatica și
— hidrodinamica-gazodinamica se face după cum se studiază echilibrul static sau mișcarea fluidelor.

În ansamblu, științele despre deformare și curgere, prezentate mai sus, sînt științe pur teoretice. Plecînd de la principiile universale ale fizicii, ele stabilesc ecuațiile diferențiale ale fenomenelor studiate. Prin integrarea lor se obțin relații ce descriu un anumit proces. Ele pot fi

Scanned with OKEN Scanner

verificate și eventual corectate pe baza rezultatelor experimentale. Prin conținutul lor și prin modul de rezolvare a problemelor, aceste ramuri de știință au un pronunțat caracter matematic.

Unele ecuații de conservare, cu valabilitate generală, ca de exemplu ecuația de conservare a impulsului, conțin termeni ce trebuiesc exprimați funcție de deformație, viteză de deformare și de proprietățile corpului. Prin substituția tensiunilor tangențiale și normale cu termenii echivalenți din legea generalizată a lui Hooke, s-a ajuns la dezvoltarea teoriei liniare a elasticității. Similar, prin folosirea legii generalizate a lui Newton, a luat naștere mecanica fluidelor newtoniene. Ambele legi elaborate în sec. XVIII sînt ecuații de comportare reologică *, deși autorii lor nu știau de existența reologiei.**

Datorită progreselor făcute în ultimele două decenii, reologia pune la dispoziția celorlalte științe ce studiază curgerea și deformarea, modele matematice ce descriu comportări mult mai complexe, în comparație cu solidul lui Hooke și lichidul lui Newton. Ele au creat noi posibilități de dezvoltare a științelor teoretice. Astfel a luat ființă teoria elasticității neliniare și mecanica fluidelor nenewtoniene.

În categoria științelor ce studiază curgerea și deformarea se încadrează și rezistența materialelor, hidraulica și pneumatica. Ele preiau rezultatele teoretice obținute de mecanica corpurilor solide rigide și deformabile și de mecanica fluidelor și le aplică în practică (v. fig.1.8). Din acest punct de vedere se poate considera că ele au un pronunțat caracter tehnic (inginerесc).

1.5.2. OBIECTUL REOLOGIEI

Denumirea de reologie derivă de la cuvintele grecești *rheo*: curgere și *logos*: știință, deci *știința curgerii*. După cum s-a precizat în paragraful 1.5, pentru prima dată reologia a fost definită drept știința deformării și curgerii. Dar curgerea este un tip de deformare. Reiner [15] remarcînd tautologia, definește reologia ca știința ce se ocupă cu studiul deformării materialelor, incluzînd și curgerea.

O astfel de definiție nu este completă, întrucît există mai multe științe care se ocupă cu studiul curgerii și deformării corpurilor. Această problemă a fost discutată în paragraful 1.5.1. Definiția trebuie să precizeze obiectul științei în așa fel încît să o diferențieze de științele înrudite.

---

* Unii autori consideră că reologia studiază numai corpurile cu proprietăți multiple, cu comportare neliniară.

** Reologia s-a constituit ca știință în secolul XX.

Scanned with OKEN Scanner

În legătură cu obiectul reologiei există foarte multe păreri [5, 12, 14, 16, 23], dintre care unele sînt contradictorii. Unii autori includ în reologie teoria clasică a elasticității și plasticității și hidraulica. Alții îi lărgesc domeniul, considerînd că mecanica fluidelor, hidraulica, teoria elasticității și plasticității și rezistența materialelor sînt cazuri particulare ale reologiei, care este știință generală a mișcării mediilor continue. Există și tendința de restrîngere a obiectului reologiei, considerîndu-se că reologia studiază numai corpurile cu proprietăți multiple, cu comportare neliniară. De asemenea, reologia este privită ca acea parte a descrierii deformației care nu este inclusă în teoria clasică.

Urmărind evoluția științelor ce studiază curgerea și deformarea, se poate desprinde și contura cu ușurință obiectul reologiei. Euler cînd a dedus ecuațiile diferențiale ale curgerii pentru fluidul ideal lipsit de viscozitate și compresibilitate, a făcut uz prin ipotezele inițiale, de o „ecuație" reologică banală $\tau_{ij} = 0$ pentru $i \neq j$. Ecuațiile diferențiale ale curgerii, deduse de Navier și Stokes, se bazează pe principiul conservării impulsului și pe ecuația reologică a fluidului newtonian. Ecuațiile diferențiale ale lui Lamé și ale lui Beltrami și Mitchell, valabile pentru corpul perfect elastic, rezultă din ecuația de echilibru și ecuația reologică liniară a lui Hooke. Aceste ecuații stau la baza mecanicii fluidelor newtoniene și respectiv a teoriei elasticității liniare. Atunci cînd au fost deduse reologia nu era constituită ca știință.

Probabil că aceasta este motivul pentru care legea lui Newton și legea lui Hooke nu sînt considerate de unii autori drept ecuații de comportare reologică.

Constituirea reologiei ca știință și elaborarea unor modele reologice neliniare au contribuit la dezvoltarea mecanicii fluidelor nenewtoniene și a teoriei elasticității neliniare. Cu acest prilej se definește și se diferențiază mai clar obiectul reologiei, în raport cu celelalte științe.

Domeniul reologiei este interdisciplinar. O astfel de viziune este reală. Interferența reologiei cu celelalte științe ce studiază curgerea și deformarea, îngreuiază delimitarea clară a domeniului și creează confuzii. Reologia oferă științelor teoretice adiacente modelele reologice și preia de la acestea rezultatele cercetărilor pe care le folosește pentru conceperea unor tehnici experimentale și a aparaturii, cu ajutorul cărora se măsoară coeficienții de material ce afectează modelele. Rezultatele experimentale servesc în același timp la verificarea modelelor reologice sau chiar la deducerea lor.

Reologia are un pronunțat caracter teoretic și aplicativ. Numeroase științe inginerești, ca rezistența materialelor, hidraulica și pneumatica, folosesc datele reologice în abordarea problemelor practice. De asemenea, metodele reologiei sînt folosite de numeroase științe din altă ramură.

Scanned with OKEN Scanner

De exemplu, chimia și fizica polimerilor folosesc determinările reologice pentru stabilirea masei molare și a configurației macromoleculelor.

Reologia și-a extins sfera investigațiilor asupra unui număr foarte mare de corpuri. Astfel a luat naștere hemoreologia, reologia pămînturilor, reologia materialelor de construcții, reologia polimerilor etc. Toate acestea nu formează noi ramuri de știință, ele se încadrează în domeniul reologiei aplicate.

Aplicațiile reologiei la studiul unor corpuri particulare a determinat pe diverși cercetători să definească reologia funcție de ramura cercetată. Nilsen A. [12], studiind reologia materialelor de construcții, dă următoarea definiție: „reologia este acea ramură de știință care caută să descrie deformațiile dependente de timp ale materialelor, cînd sînt supuse la acțiuni mecanice, ca o funcție de compoziția și structura lor". Forslind E. definește reologia ca „acea ramură de știință care se ocupă cu proprietățile deformaționale ireversibile ale materiei". O definiție recentă, care se apropie cel mai mult de obiect, consideră reologia „ramura mecanicii ce se ocupă cu acele proprietăți ale materialelor care determină răspunsul lor la forțele mecanice".*)

Concluziile ce se desprind din paragrafele 1.3 și 1.5 conturează cu suficientă precizie obiectul reologiei, interferența ei cu științele adiacente și îi precizează locul în ansamblul științelor ce studiază curgerea și deformarea corpurilor. Aceasta permite să se propună următoarea definiție:

Reologia este știința ce studiază interdependența între solicitările mecanice, răspunsul corpurilor și proprietățile acestora [24].

Instrumentul de bază ce caracterizează reologia este conceptul de model reologic. El se bazează pe faptul că deformația tuturor corpurilor poate fi elastică, vîscoasă, plastică sau mixtă [12]. Modelul reologic este o expresie matematică între solicitare, răspuns și proprietăți, sau, mai precis, între tensiuni, deformații sau viteză de deformare și coeficienții de material. Reologia studiază, teoretic sau experimental, tipul de comportare reologică a corpurilor, funcție de răspunsul acestora la solicitări, stabilește expresia modelului reologic și determină, pe cale experimentală, coeficienții de material. Pe baza mecanismului răspunzător de o anumită comportare reologică, cu alte cuvinte pe baza corelației dintre structura corpului și răspunsul la solicitare, se stabilește experimental structura unui anumit corp.

Procesul de curgere sau deformare a unui corp este descris de un set de ecuații, în care obligator intervine o ecuație de comportare reo-

* Broșura Societății de reologie din Statele Unite ale Americii.

Scanned with OKEN Scanner

logică. În ipoteza valabilității legii de reciprocitate a tensiunilor tangențiale [v. ec. (1.97)], sînt necesare cinci tipuri de ecuații (12 ecuații):

— ecuația continuității;
— ecuațiile impulsului (3 componente);
— ecuația energiei;
— ecuația de comportare reologică (6 componente) și
— ecuația de stare.

Primele trei ecuații, rezultate pe baza principiilor de conservare, au valabilitate generală. Ecuația reologică și ecuația de stare sînt specifice unui singur corp sau unei clase de corpuri. Coeficienții de material din aceste ecuații au valori dependente de natura corpurilor și se determină pe cale experimentală.

BIBLIOGRAFIE

1. BEJU, I., SOOS, E. și TEODORESCU, P. P., *Tehnici de calcul tensorial euclidian cu aplicații*, București, Editura tehnică 1977.
2. BIRD, B. R., STEWART, W. E. și LIGHTFOOT, E.N., *Transport phenomena*, New York, Wiley and Sons, 1960.
3. BRĂDEANU, P., *Mecanica fluidelor*, București, Editura tehnică, 1973.
4. CATCHANOV, L., *Eléments de la téorie de la plasticité*, Moscou, Editions Mir, 1975.
5. CIOC, D., *Hidraulica*, București, Editura didactică și pedagogică, 1975.
6. FILONENCO-BORODICI, M.M., *Teoria elasticității* (trad. din limba rusă) București, Editura tehnică, 1952.
7. FREDRICKSON, A.G. *Principles and applications of rheology*, Englewood Cliffs, New Jersey, Prentice-Hall, inc. 1964.
8. IACOB, C., *Mecanică teoretică*, București, Editura didactică și pedagogică, 1971.
9. LENK, R. S., *Plastics rheology*, London, MacLaren and Sons, 1968.
10. MIDDLEMAN, S., *The flow oh high polymers. Continuum and molecular rheology*, New York, Interscience Publishers, 1968.
11. MURNAGHAN, F. D., *Finite deformation of an elastic solid*, New York, Dovers Publications, 1967.
12. NIELSEN, A., *Rheology of building materials*, Stockholm, Rotobeckman, 1972.
13. OLSZAK, W., PERZINA, P. și SAWCZUK, A., *Teoria plasticității* (trad. din lba poloneză), București, Edit. tehnică, 1970.
14. REINER, M., *Deformation, strain and flow*, Second edition, London, H. K. Lewis and Co.Ltd., 1960.
15. RIVLING, R. S., *Large elastic deformations*. In: Eirich, F. R. Rheology. Theory and applications. Vol. I, New York, Academic Press, 1956.
16. SCOTT BLAIR G. W., *Elementary rheology*, London, Academic Press, 1969.

Scanned with OKEN Scanner

17. SEDOV, L., *Mécanique des milieux continus*, Vol. I și II, Moscou, Editions Mir, 1975.
18. SHARMA, M. G., *Theories of phenomenological viscoelasticity underlying mechanical testing*. In: Schmitz, J. V. Testing of polymers, vol. I, New York, Interscience publishers, 1965.
19. SHERMAN, P., *Industrial rheology*, London, Academic Press, 1970.
20. SOLOMON, L., *Elasticitate liniară. Introducere matematică în statica solidului elastic*. București, Editura academiei RSR, 1969.
21. SLATTERY, J. C., *Momentum, energy and mass transfer in continua*, New York, McGraw-Hill, 1972.
22. TUDOSE, R. Z., *Procese și utilaje în industria de prelucrare a compușilor macromoleculari*, București, Editura tehnică, 1976.
23. WILLIAMS, D. J., *Polymer Science and engineering*. Englewood Cliffs, New Jereys, Prentice-Hall, Inc., 1971.
24. TUDOSE, R. Z., și VITAN, F., În: Materiale plastice, 17, nr. 1, p. 19, 1980.

Scanned with OKEN Scanner

2

CORPURI CU PROPRIETĂȚI UNITARE

2.1. INTRODUCERE

Corpurile din natură posedă, din punct de vedere reologic, două proprietăți intrinseci: *vîscozitate* și *elasticitate. Plasticitatea ca mod de manifestare a unor corpuri la acțiunea solicitărilor, este considerată ca a treia proprietate.* Materialele pot să posede din cele trei proprietăți — vîscozitate, elasticitate și plasticitate — una, două sau toate trei, în diferite proporții. Astfel se poate explica marea diversitate a comportărilor reologice.

Ramurile de știință ce derivă din mecanică s-au dezvoltat în etapa incipientă pe baza studiilor efectuate asupra unor *corpuri ideale: lichidul lui Pascal* și *solidul lui Euclid.* Aceste corpuri nu prezintă importanță din punct de vedere reologic, deoarece nu posedă nici una din proprietățile specifice materiei; lichidul lui Pascal este lipsit de vîscozitate, iar solidul lui Euclid este rigid.

Cele mai simple corpuri pe care le studiază reologia posedă o singură proprietate. Comportarea lor este descrisă cu ajutorul unor legi liniare. Acestea sînt *corpurile cu proprietăți unitare, cu comportare ideală* sau *corpurile reologice particulare:*

— fluidul lui Newton, pur vîscos;
— solidul lui Hooke, perfect elastic;
— plasticul lui St. Venant, perfect plastic.

Stabilirea ecuației reologice a unui corp real se face, de multe ori, pe baza ecuațiilor corpurilor cu comportare ideală. Idealizarea comportării unor materiale constituie punctul de plecare în modelare, întrucît comportarea reală este definită în termeni de abatere de la idealitate. Din acest punct de vedere, conceptul de corp cu comportare

Scanned with OKEN Scanner

ideală este important nu numai pentru stabilirea răspunsului unor corpuri simple, ci, în special, pentru modelarea celor cu comportare multiplă.

Corpurile cu proprietăţi unitare, sub acţiunea solicitărilor, se deformează. Lichidele newtoniene la efort constant se deformează (curg) cu viteză constantă. Deformaţia este nerecuperabilă. Solidul Hooke prezintă deformaţii elastice, total recuperabile, proporţionale cu mărimea solicitărilor. Plasticul St. Venant, peste pragul de tensiune, se deformează nerecuperabil. Toate au comportare ideală, întrucît relaţiile între tensiuni şi deformaţie, respectiv viteză de deformare, sînt liniare.

Modelele reologice ale corpurilor cu proprietăţi unitare au contribuit, după cum s-a menţionat, la dezvoltarea mecanicii fluidelor newtoniene, a teoriei elasticităţii liniare, a teoriei plasticităţii şi la dezvoltarea reologiei corpurilor cu proprietăţi multiple.

2.2. FLUIDUL LUI NEWTON

Corpul pur vîscos sau fluidul lui Newton posedă numai viscozitate. Sub acţiunea unei solicitări, curge. Curgerea este un proces de deformare continuă cu viteză finită. Legea care descrie comportarea reologică include coeficienţii de viscozitate şi este valabilă numai în curgerea laminară.

Curgerea laminară se caracterizează prin alunecarea volumelor elementare de fluid sub forma unor lamele foarte subţiri. Forfecarea simplă prin antrenare între două plane paralele, sau *curgerea Couette*, constituie un tip important de curgere, în care impulsul se transferă printr-un mecanism molecular (fig. 2.1, *a*). Într-un spaţiu cilindric curgerea laminară poate fi rotativă, telescopică sau torsionară (fig. 2.1, *b*, *c*, *d*). Curgerea telescopică, sub acţiunea unui gradient de presiune, se caracterizează printr-un profil parabolic al vitezelor şi se numeşte curgere Poiseuille.

Curgerea este un tip de deformaţie. Deformaţia viscoasă depinde de mărimea şi durata solicitării. La efort constant, curgerea este continuu întreţinută, deformaţia este continuu crescătoare şi viteza de deformare este constantă. Din această cauză, la corpurile pur viscoase, tensiunea se corelează cu viteza de deformare.

Proprietatea fluidelor de a opune rezistenţă la deformare este o manifestare a viscozităţii. Fluidul a cărui comportare este descrisă de o ecuaţie care prezintă proporţionalitate directă între tensiune şi viteză de deformare, iar coeficienţii de proporţionalitate sînt independenţi

Scanned with OKEN Scanner

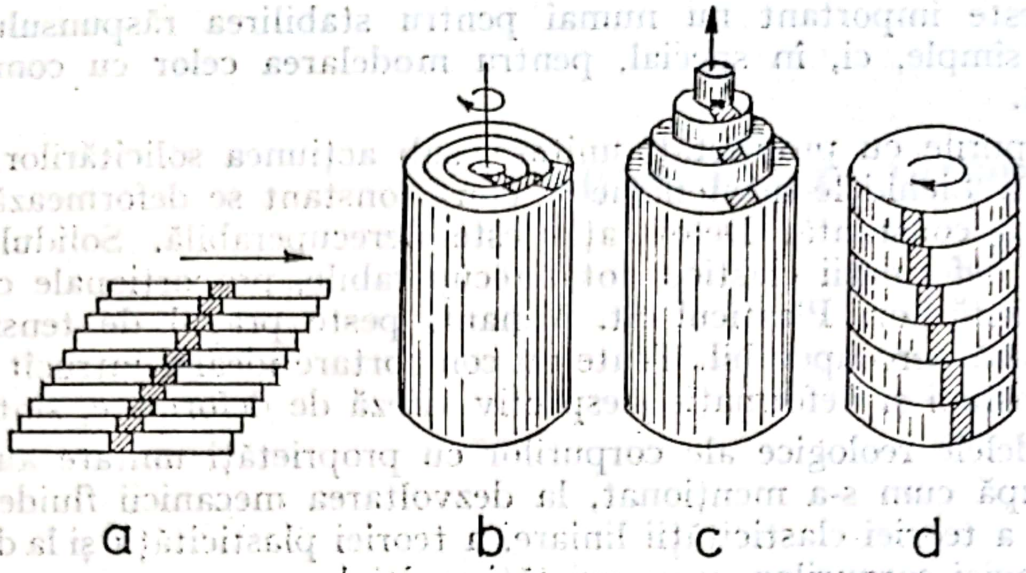


Fig. 2.1. Curgeri laminare:
a — plan-paralelă; *b* — rotativă; *c* — telescopică; *d* — torsionară.

de parametrii solicitării, se numește fluidul lui Newton. Comportarea reologică a acestor fluide se numește comportare newtoniană.

Pentru fluide este convenabil să se despartă tensorul tensiunilor în două părți (v. § 1.3.2) [5, 9]:

$$\tau_{ij} = -p\delta_{ij} + \tau'_{ij} \tag{2.1}$$

în care p este presiunea termodinamică (diferită de presiunea hidrostatică), τ'_{ij} sînt componentele tensorului tensiunilor de forfecare și δ_{ij} simbolul lui Kronecker.

Cînd fluidul este în repaus $\tau'_{ij} = 0$, presiunea termodinamică devine egală cu presiunea hidrostatică p_0 și ecuația se simplifică:

$$\tau_{ij} = -p_0\delta_{ij} \tag{2.2}$$

Condiția de liniaritate impusă între componentele tensorului de forfecare și componentele tensorului vitezei de deformare conduce la simplificarea unei ecuații generale, dată în [5], la forma:

$$\tau'_{ij} = 2\eta\,\dot{\gamma}_{ij} + k\dot{\gamma}_v\delta_{ij} \tag{2.3}$$

în care coeficientul de material k este

$$k = \eta_v - \frac{2}{3}\eta \tag{2.4}$$

funcție de viscozitatea dinamică η — o măsură a rezistenței corpului la modificările de formă, și de viscozitatea volumică η_v — o măsură

a rezistenței la modificările de volum. După substituția ecuației (2.4) în (2.3) se obține:

$$\tau'_{ij} = 2\eta\dot{\gamma}_{ij} + \left(\eta_v - \frac{2}{3}\eta\right)\dot{\gamma}_v\delta_{ij} \tag{2.5}$$

în care $\dot{\gamma}_{ij}$ sînt componentele tensorului vitezei de deformare, iar $\dot{\gamma}_v$ este viteza de deformare volumică [(v. tab. 1.3 și ec. (1.66)]. Aceasta este ecuația reologică a lichidului lui Newton.

Ecuația fluidului newtonian conține doi coeficienți de material, η și η_v, ai căror valori se obțin experimental. Valorile nu depind de mărimea și durata solicitării și nici de viteza de deformare. Componentele ecuației (2.5) sînt trecute în tabelul 2.1, în coordonate rectangulare carteziene, cilindrice și sferice [6].

Tabelul 2.1

Legea generalizată a lui Newton (componentele tensorului tensiunilor de forfecare) *

Coordonate	Componente	Expresia componentei
Rectangulare carteziene	Normale	$\tau'_{xx} = \eta\left(2\frac{\partial v_x}{\partial x} - \frac{2}{3}\dot{\gamma}_v\right) + \eta_v\dot{\gamma}_v$
		$\tau'_{yy} = \eta\left(2\frac{\partial v_y}{\partial y} - \frac{2}{3}\dot{\gamma}_v\right) + \eta_v\dot{\gamma}_v$
		$\tau'_{zz} = \eta\left(2\frac{\partial v_z}{\partial z} - \frac{2}{3}\dot{\gamma}_v\right) + \eta_v\dot{\gamma}_v$
	Tangențiale	$\tau'_{xy} = \tau'_{yx} = \eta\left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x}\right)$
		$\tau'_{yz} = \tau'_{zy} = \eta\left(\frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y}\right)$
		$\tau'_{zx} = \tau'_{xz} = \eta\left(\frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial z}\right)$
Cilindrice	Normale	$\tau'_{rr} = \eta\left(2\frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{2}{3}\dot{\gamma}_v\right) + \eta_v\dot{\gamma}_v$
		$\tau'_{\theta\theta} = \eta\left[2\left(\frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial\theta} + \frac{v_r}{r}\right) - \frac{2}{3}\dot{\gamma}_v\right] + \eta_v\dot{\gamma}_v$
		$\tau'_{zz} = \eta\left(2\frac{\partial v_z}{\partial z} - \frac{2}{3}\dot{\gamma}_v\right) + \eta_v\dot{\gamma}_v$

Scanned with OKEN Scanner

Tabelul 2.1(continuare)

Coordonate	Componente	Expresia componentei
Cilindrice	Tangențiale	$\tau'_{r\theta} = \tau'_{\theta r} = \eta\left[r\,\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{v_\theta}{r}\right) + \frac{1}{r}\,\frac{\partial v_r}{\partial \theta}\right]$
		$\tau'_{z\theta} = \tau'_{\theta z} = \eta\left(\frac{\partial v_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r}\,\frac{\partial v_z}{\partial \theta}\right)$
		$\tau'_{zr} = \tau'_{rz} = \eta\left(\frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{\partial v_r}{\partial z}\right)$
Sferice	Normale	$\tau'_{rr} = \eta\left(2\,\frac{\delta v_r}{\delta r} - \frac{2}{3}\,\dot{\gamma}_v\right) + \eta_v\dot{\gamma}_v$
		$\tau'_{\theta\theta} = \eta\left[2\left(\frac{1}{r}\,\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r}{r}\right) - \frac{2}{3}\,\dot{\gamma}_v\right] + \eta_v\dot{\gamma}$
		$\tau'_{\varnothing\varnothing} = \eta\left[2\left(\frac{1}{r\sin\theta}\,\frac{\partial v_\varnothing}{\partial \varnothing} + \frac{v_r}{r} + \frac{v_\theta \operatorname{ctg}\theta}{r}\right) - \right.$
		$\left. - \frac{2}{3}\,\dot{\gamma}_v\right] + \eta_v\dot{\gamma}_v$
	Tangențiale	$\tau'_{r\theta} = \tau'_{\theta r} = \eta\left[r\,\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{v_\theta}{r}\right) + \frac{1}{r}\,\frac{\partial v_r}{\partial \theta}\right]$
		$\tau'_{\theta\varnothing} = \tau'_{\varnothing\theta} = \eta\left[\frac{\sin\theta}{r}\,\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{v_\varnothing}{\sin\theta}\right) + \frac{1}{r\sin\theta}\,\frac{\partial v_\theta}{\partial \varnothing}\right]$
		$\tau'_{\varnothing r} = \tau'_{r\varnothing} = \eta\left[\frac{1}{r\sin\theta}\,\frac{\partial v_r}{\partial \varnothing} + r\,\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{v_\varnothing}{r}\right)\right]$

* Expresiile componentelor $\dot{\gamma}_{xx}$, $\dot{\gamma}_{yy}$ și $\dot{\gamma}_{zz}$ din $\dot{\gamma}_v = \dot{\gamma}_{xx} + \dot{\gamma}_{yy} + \dot{\gamma}_{zz}$ sînt date în tabelul 1.3

Fluidele newtoniene compresibile posedă și elasticitate volumică, generînd tensiuni care se opun modificărilor de volum. Elasticitatea volumică nu contrazice noțiunea de fluid pur vîscos, care se referă la comportarea materialului sub acțiunea tensiunilor de forfecare. Comportarea unui fluid newtonian compresibil este descrisă de o ecuație care conține presiunea termodinamică [ec. (2.1)]. Presiunea termodinamică este dependentă de temperatura și densitatea fluidului. Dacă

Scanned with OKEN Scanner

variațiile de densitate nu sînt mari, prin dezvoltarea în serie Taylor, rezultă [5]:

$$p - p_0 = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_{T,\rho_0} (\rho - \rho_0) + \ldots \simeq E_v \left(\frac{\rho - \rho_0}{\rho_0}\right) \tag{2.6}$$

în care p_0 și ρ_0 sînt presiunea și respectiv densitatea în starea de referință și E_v modulul de elasticitate volumică — o măsură a elasticității la schimbările de volum.

Substituția presiunii termodinamice p din (2.1) cu (2.6) și a tensorului tensiunilor de forfecare cu (2.5), conduce la

$$\tau_{ij} = -p_0\delta_{ij} - E_v\left(\frac{\rho - \rho_0}{\rho_0}\right)\delta_{ij} + 2\eta\dot{\gamma}_{ij} + \left(\eta_v - \frac{2}{3}\eta\right)\dot{\gamma}_v\delta_{ij}$$

sau, sub o altă formă:

$$\tau_{ij} = -p_0\delta_{ij} - E_v\left(\frac{\rho - \rho_0}{\rho_0}\right)\delta_{ij} + \eta_v\dot{\gamma}_v\delta_{ij} + 2\eta\left(\dot{\gamma}_{ij} - \frac{1}{3}\dot{\gamma}_v\delta_{ij}\right) \tag{2.7}$$

Ecuația (2.7) demonstrează că pentru un fluid newtonian compresibil, în curgere, componentele tensorului tensiunilor sînt formate din patru părți [5]. Primul termen se referă la presiunea hidrostatică și este dominant atunci cînd fluidul este în repaus. Termenul al doilea reprezintă tensiunea elastică pe care o opune corpul la schimbările de volum. Tensiunile datorate viscozității ce se opun schimbărilor de volum sînt reprezentate de al treilea termen. Ultimul termen din dreapta reprezintă tensiunile, generate de viscozitate, pe care le opune fluidul la schimbările de formă.

Viscozitatea volumică sau cel de al doilea coeficient de viscozitate η_v poate fi neglijat. Pentru gaze monoatomice cu densitate scăzută $\eta_v \equiv 0$ și probabil poate fi neglijată în cazul gazelor dense și a lichidelor [1].

$$\tau'_{ij} = 2\eta\dot{\gamma}_{ij} - (2/3)\,\eta\dot{\gamma}_v\delta_{ij} \tag{2.8}$$

Un fluid newtonian necompresibil sub acțiunea solicitărilor nu suferă deformații de volum $\dot{\gamma}_v = 0$. Supus la solicitare de forfecare pură, constantă, va curge cu viteză constantă. Corelația între tensiune și viteza de deformare are forma:

$$\tau'_{ij} = 2\eta\dot{\gamma}_{ij} \tag{2.9}$$

Scanned with OKEN Scanner

sau, considerînd solicitările după direcțiile x și y, rezultă:

$$\tau'_{yx} = \eta\left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x}\right) \tag{2.10}$$

În fluide newtoniene necompresibile presiunea termodinamică este egală cu presiunea medie și tensorul tensiunilor de forfecare τ'_{ij} devine egal cu deviatorul tensorului tensiunilor.

La solicitările de forfecare simplă, de exemplu după direcția x, componenta $v_y = 0$ și ultima ecuație se simplifică

$$\tau'_{yx} = \eta\frac{\partial v_x}{\partial y} \quad \left(\tau'_{yx} = \eta\dot{\gamma}_{yx}\right)^* \tag{2.11}$$

Această ecuație este cunoscută ca *legea de frecare a lui Newton.*

Teoria clasică a fluidelor viscoase necompresabile s-a dezvoltat pe baza ecuațiilor reologice [3]:

$$\tau_{ij} = -p\delta_{ij} + 2\eta\dot{\gamma}_{ij} \tag{2.12}$$

$$\dot{\gamma}_v = 0 \tag{2.13}$$

care au condus la ecuațiile Navier-Stokes ale curgerii fluidelor. Fluidele care respectă ecuațiile (2.12) și (2.13) au fost denumite fluide Navier-Stokes, în legătură cu care se mai poate preciza că sînt fluide newtoniene necompresibile [3].

Reograma fluidului cu comportare newtoniană, în condiții izoterme, este o dreaptă a cărei pantă este o măsură a viscozității, (fig. 2.2).

Un fluid poate fi în mișcare și atunci cînd viteza de deformare este identic egală cu zero. Toate volumele elementare de fluid dintr-o secțiune normală la direcția de curgere se deplasează sau se rotesc cu aceeași viteză; fluidul se deplasează ca un corp solid în mișcare de translație sau rotație. Într-un astfel de proces — denumit *curgere de tip piston* sau *curgere cu deplasare totală* — fluidul nu se deformează și mișcare nu poate fi asociată cu acel răspuns al materialului care interesează procesul de curgere.

În fluide viscoase, deformarea determină creșterea forțelor de frecare care disipează o parte din energia cinetică a fluidului și o face să apară sub formă de căldură. La viteze mici de forfecare, în fluidele cu visco-

---

* La forfecarea simplă, viteza de forfecare are un singur termen, deci nu mai este necesară medierea a doi termeni și $(\delta v_x/\delta_y)$ se notează cu $\dot{\gamma}_{yx}$.

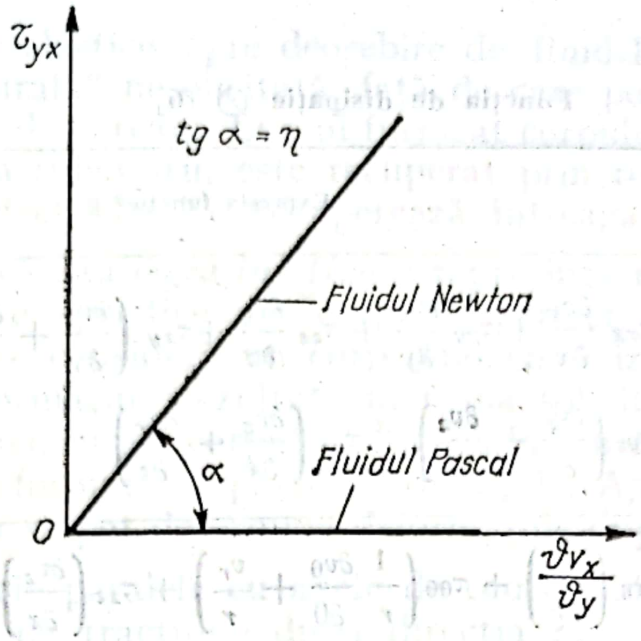


Fig. 2.2. Fluidul lui Newton solicitat la forfecare simplă.

zitate mică, creșterea temperaturii cauzată de disiparea energiei este neesențială. Fluidele cu viscozitate mare pot genera cantități importante de căldură ce modifică proprietățile fluidului. Un exemplu practic îl constituie mașina de extrudere autogenă, la care căldura necesară plastifierii rezultă prin disiparea energiei mecanice.

Modificarea temperaturii fluidului schimbă viscozitatea și, respectiv, forțele ce se opun curgerii. În acest caz trebuie cunoscută distribuția temperaturii în fluid și efectul ei asupra proprietăților. Cîmpul temperaturilor este dat de ecuația energiei (v. tab. 1.7). Substituind componentele fluxului de energie (v. tab. 1.8), ecuația energiei pentru fluide newtoniene, necompresibile, devine:

$$\rho c_p \frac{DT}{dt} = \lambda \nabla^2 T + 2\eta \varnothing \qquad (2.14)$$

în care $\varnothing$ este funcția de disipație. Ecuația precizează că temperatura într-un fluid în mișcare se poate modifica datorită conductivității termice și datorită conversiei energiei cinetice în căldură.

Funcția de disipație reprezintă viteza volumică de transformare a energiei cinetice în căldură. Expresia funcției este prezentată în tabelul 2.2.

Substituția componentelor ecuației (2.8) în ecuațiile de conservare a impulsului (v. tab. 1.9) permite obținerea ecuațiilor diferențiale ale curgerii fluidelor newtoniene (v. tab. 1.10). Prin simplificarea lor, în cazul fluidelor necompresibile, rezultă ecuațiile Navier-Stokes (v. tab. 1.11).

Scanned with OKEN Scanner

Funcția de disipație ∅ [6]

Coordonate	Expresia funcției ∅
Rectangulare carteziene	$\varnothing = \tau_{xx}\frac{\partial v_x}{\partial x} + \tau_{yy}\frac{\partial v_y}{\partial y} + \tau_{zz}\frac{\partial v_z}{\partial z} + \tau_{xy}\left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x}\right) + \tau_{yz}\left(\frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y}\right) + \tau_{zx}\left(\frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial z}\right)$
Cilindrice	$\varnothing = \tau_{rr}\left(\frac{\partial v_r}{\partial r}\right) + \tau_{\theta\theta}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r}{r}\right) + \tau_{zz}\left(\frac{\partial v_z}{\partial z}\right) + \tau_{r\theta}\left[r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{v_\theta}{r}\right) + \frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \theta}\right] + \tau_{\theta z}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial v_z}{\partial \theta} + \frac{\partial v_\theta}{\partial z}\right) + \tau_{rz}\left(\frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{\partial v_r}{\partial z}\right)$
Sferice	$\varnothing = \tau_{rr}\left(\frac{\partial v_r}{\partial r}\right) + \tau_{\theta\theta}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r}{r}\right) + \tau_{\varnothing\varnothing}\left(\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial v_\varnothing}{\partial \varnothing} + \frac{v_r}{r} + \frac{v_\theta \operatorname{ctg}\theta}{r}\right) + \tau_{r\theta}\left(\frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta}{r}\right) + \tau_{r\varnothing}\left(\frac{\partial v_\varnothing}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial v_r}{\partial \varnothing} - \frac{v_\varnothing}{r}\right) + \tau_{\theta\varnothing}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial v_\varnothing}{\partial \theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial v_\theta}{\partial \varnothing} - \frac{\operatorname{ctg}\theta}{r}v_\varnothing\right)$

2.3. SOLIDUL LUI HOOKE

Fluidele pur vîscoase supuse la eforturi de forfecare se deformează continuu, modificîndu-și forma iar lucrul consumat este convertit tota în căldură. Din această cauză, după suprimarea solicitărilor, nu se recuperează nici o parte din deformație.

Scanned with OKEN Scanner

Solidele perfect elastice, spre deosebire de fluidele pur vîscoase, posedă o „stare naturală" nesolicitată, față de care posedă „memorie" și la care revin, după descărcare. Lucrul furnizat corpului este conservat și, după îndepărtarea solicitării, este recuperat prin revenire la starea inițială. Solidele perfect elastice recuperează întreaga deformație [4].

Ecuația reologică sau *legea lui Hooke* reprezintă relația între tensiunile și deformațiile specifice ale corpului perfect elastice. Pentru a scrie această lege se consideră un corp omogen și izotrop, de formă paralelipipedică. Deformațiile rezultate în urma solicitărilor sînt mici, în comparație cu dimensiunile corpului. În general, o tensiune aplicată după o direcție dă deformații după toate direcțiile. Aplicînd principiul independenței forțelor se pot determina deformațiile după orice direcție.

Un corp cu fețele paralele cu axele de coordonate (fig. 2.3), este supus la o solicitare de tracțiune după direcția x.
Relația între tensiune și deformația specifică este liniară:

$$\gamma_{xx} = \frac{1}{E}\,\tau_{xx} \tag{2.15}$$

în care E este modulul de elasticitate longitudinală (v. § 1,2.2.2). După celelalte două direcții corpul se scurtează

$$\gamma_{yy} = \gamma_{zz} = -\mu\gamma_{xx} = -\frac{\mu}{E}\,\tau_{xx} \tag{2.16}$$

unde μ este coeficientul lui Poisson.

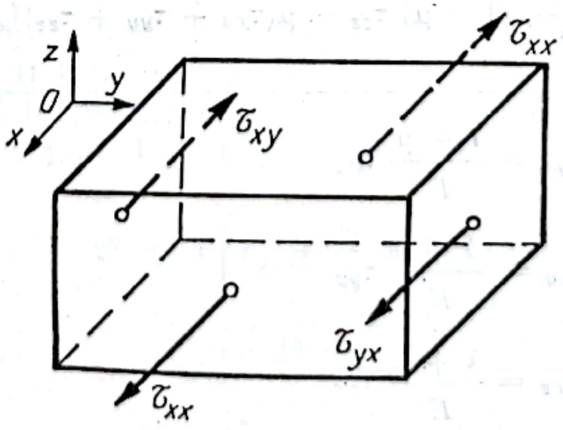


Fig. 2.3. Corp solicitat la tracțiune sau forfecare simplă.

Scanned with OKEN Scanner

Cînd corpul este solicitat numai de tensiunile tangențiale τ_{yx} deformația specifică va fi:

$$\gamma_{yx} = \frac{1}{2G}\tau_{yx} \tag{2.17}$$

unde G este modulul de elasticitate la forfecare sau de elasticitate transversală (v. § 1.2.2.4).

Celelalte tensiuni normale și tangențiale produc deformații specifice analoge. Folosind principiul suprapunerii efectelor se scrie *legea generalizată a lui Hooke*, explicitată în raport cu deformațiile:

$$\gamma_{ij} = \frac{1}{E}[(1+\mu)\tau_{ij} - \mu\tau_v\delta_{ij}] \quad (i,j = x,y,z) \tag{2.18}$$

în care

$$\tau_v = \tau_{xx} + \tau_{yy} + \tau_{zz} \tag{2.19}$$

Componentele ecuației (2.18) sînt prezentate în tabelul 2.3.

Tabelul 2.3

Legea generalizată a lui Hooke (componentele) tensorului deformațiilor specifice)*)

Componente	Expresia componentei
Normale	$\gamma_{xx} = \frac{1}{E}[(1+\mu)\tau_{xx} - \mu(\tau_{xx}+\tau_{yy}+\tau_{zz})]$
	$\gamma_{yy} = \frac{1}{E}[(1+\mu)\tau_{yy} - \mu(\tau_{xx}+\tau_{yy}+\tau_{zz})]$
	$\gamma_{zz} = \frac{1}{E}[(1+\mu)\tau_{zz} - \mu(\tau_{xx}+\tau_{yy}+\tau_{zz})]$
Tangențiale	$\gamma_{xy} = \gamma_{yx} = \frac{1+\mu}{E}\tau_{xy}$
	$\gamma_{yz} = \gamma_{zy} = \frac{1+\mu}{E}\tau_{yz}$
	$\gamma_{zx} = \gamma_{xz} = \frac{1+\mu}{E}\tau_{zx}$

* În componentele tangențiale G s-a exprimat funcție de E, conform tabelului 1.4

Scanned with OKEN Scanner

În rezolvarea unor probleme de solicitare a corpurilor elastice, uneori se preferă legea generalizată a lui Hooke, exprimată în raport cu eforturile unitare:

$$\tau_{ij} = 2G\gamma_{ij} + \lambda_L \gamma_v \delta_{ij} \quad (i, j = x, y, z) \tag{2.20}$$

Componentele tensorului tensiunilor din legea generalizată a lui Hooke sînt date în tabelul 2.4.

Tabelul 2.4

Legea generalizată a lui Hooke (componentele tensorului tensiunilor)

Componente	Expresia componentei
Normale	$\tau_{xx} = 2G\gamma_{xx} + \lambda_L(\gamma_{xx} + \gamma_{yy} + \gamma_{zz})$
	$\tau_{yy} = 2G\gamma_{yy} + \lambda_L(\gamma_{xx} + \gamma_{yy} + \gamma_{zz})$
	$\tau_{zz} = 2G\gamma_{zz} + \lambda_L(\gamma_{xx} + \gamma_{yy} + \gamma_{zz})$
Tangențiale	$\tau_{xy} = \tau_{yx} = 2G\gamma_{xy}$
	$\gamma_{yz} = \gamma_{zy} = 2G\gamma_{yz}$
	$\gamma_{zx} = \gamma_{xz} = 2G\gamma_{zx}$

Legea lui Hooke pentru corpurile omogene și izotrope conține doi coeficienți de material $G = \lambda_e$ și λ_L — *coeficienții lui Lamé*, — a căror valori pentru un material elastic dat, sînt constante și reprezintă proprietăți intrinseci ale acestuia. Corpurile anizotrope sînt caracterizate de 81 de coeficienți, din care 36 sînt independenți. Datorită simetriei tensorilor, numărul coeficienților independenți se reduce la 21. În cazul corpurilor cu anizotropie liniară generală și omogenă, coeficienții de material sînt constanți [8].

Tensorii sferici ai tensiunii și deformației, ca și deviatorul tensiunilor și deviatorul deformațiilor [v. ec. (1.19), (1.20), (1.41) și (1.42)] permit descompunerea legii lui Hooke în două componente

$$\tau^0 = 3\left(\lambda_L + \frac{2}{3}\lambda_e\right)\gamma^0 \tag{2.21}$$

$$\tau'_{ij} = 2\lambda_e \gamma'_{ij} \tag{2.22}$$

în care

$$\lambda_L + \frac{2}{3}\lambda_e = E_b \tag{2.23}$$

Scanned with OKEN Scanner

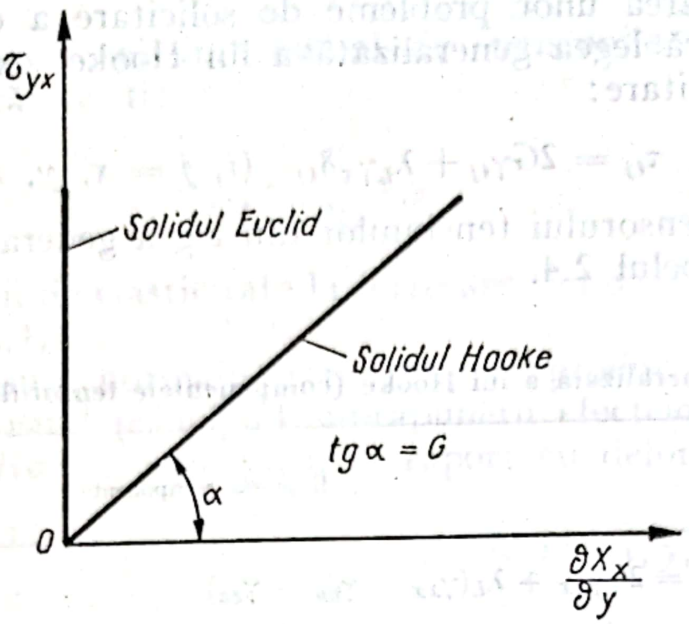


Fig. 2.4. Solidul lui Hooke solicitat la forfecare simplă.

reprezintă *modulul de compresiune elastică* sau *modulul de elasticitate volumică*. Ecuația reologică (2.21) corespunde deformărilor de volum ale corpului elastic, fără modificarea formei, pe cînd ecuația (.22) descrie deformările de formă în condiții izocore.

Considerînd un corp elastic supus la forfecare simplă, de o tensiune τ_{yx}, legea lui Hooke se simplifică la forma:

$$\tau_{yx} = G\frac{\partial X_x}{\partial y} \quad \text{sau} \quad \tau_{yx} = G \cdot \gamma_{yx}^{*} \tag{2.24}$$

identică cu ecuația (2.17). Reograma solidului Hooke solicitat la forfecare simplă este reprezentată de o dreaptă, a cărei pantă este o măsură a modulului de elasticitate (fig. 2.4).

Corpul perfect elastic prezintă proporționalitate directă între tensiune și deformație. Pentru alte corpuri elastice deformația este funcție de tensiune și de timp. La solicitare constantă deformația crește tinzînd către o limită. După descărcare deformația se recuperează lent. Solidele ce posedă astfel de proprietăți se numesc *corpuri cu elasticitate întîrziată*.

Truesdell [11] introduce conceptul de hipoelasticitate. El menționează că, în conformitate cu teoria stării naturale a elasticității perfecte, corpul posedă memorie pentru starea sa naturală, nesolicitată. Dacă deformația este raportată la starea sa naturală, conform teoriei elastici-

---

* La forfecare simplă, modificarea formei corpului este descrisă printr-un singur termen, nu mai este necesară medierea a doi termeni și $(\delta X_x/\delta_y)$ se notează cu γ_{yx}.

Scanned with OKEN Scanner

tății perfecte, ea va dispare complet după descărcare, prin revenire la această stare. Unele materiale, spre exemplu cauciucul, prezintă comportări ce nu pot fi corelate cu teoria stării naturale.

Truesdell presupune că pentru unele corpuri trebuie corelată viteza de tensionare cu viteza de deformare, $^{\circ} = f(^{\circ})$. Conform acestei teorii, numită teoria hipoelasticității, corpul posedă memorie numai pentru starea imediat anterioară. Aceste corpuri se numesc *hipoelastice.*

Microreologia distinge două feluri de elasticitate: potențială și cinetică [8]. Elasticitatea potențială este proprie corpurilor care înmagazinează solicitarea sub formă de energie potențială. Elasticitatea cinetică este proprie gazelor și este reprezentată de energia cinetică a moleculelor. Cele două tipuri de elasticitate se deosebesc prin dependența lor de temperatură.

Ecuațiile diferențiale ale lui Lamé (v. tab. 1.12), exprimate în deformații specifice se obțin prin substituția componentelor tensorului tensiunii din legea generalizată a lui Hooke (v. tab. 2.4) în ecuațiile de conservare a impulsului (v. tab. 1.6). Exprimarea termenilor în tensiuni conduce la ecuațiile diferențiale Beltrami-Mitchell (v. tab. 1.13).

2.4. PLASTICUL LUI ST. VENANT

Plasticitatea reprezintă un mod de comportare a unor corpuri. Metalele sînt cele mai caracteristice materiale care posedă elasticitate și plasticitate. Oțelul supus la solicitări se deformează elastic, pînă la o limită, după care apar deformații plastice (fig. 2.5, *a*, curba *1*).

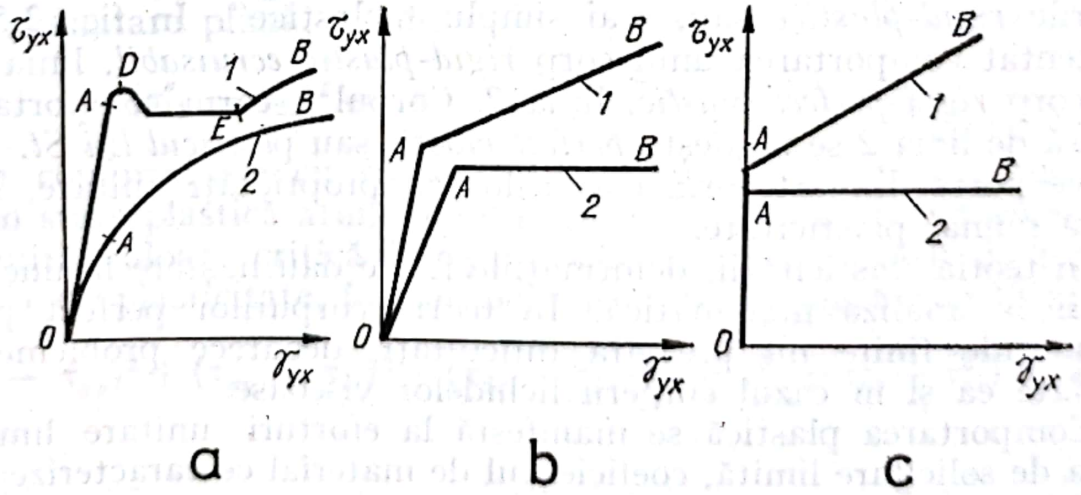


Fig. 2.5. Comportarea plastică:

a — curbe reale de comportare elastoplastică; *b* — curbe idealizate pentru comportare elastoplastică; *b* — curbe idealizate pentru comportare elastoplastică; *c* — curbe idealizate pentru comportare rigid plastică.

Scanned with OKEN Scanner

Punctul A, care se găsește sub *limita de elasticitate* reprezentată de punctul D, corespunde *limitei de proporționalitate* dintre eforturi și deformații. După punctul D urmează *palierul de curgere* DE și domeniul de *ecruisare* EB. Comportarea plastică se manifestă pe intervalul DB. Alte metale, ca de exemplu, cuprul, nu prezintă o limită de elasticitate distinctă (curba 2).

Proprietățile de elasticitate și viscozitate la corpurile viscoelastice solicitate la forfecare, se manifestă concomitent în toate punctele corpului. Materialele elastoplastice manifestă succesiv comportarea elastică și plastică. Acest lucru se explică prin manifestarea simultană a celor două proprietăți, dar în puncte diferite ale corpului; există zone cu comportare elastică și zone cu comportare plastică. Diferențele între comportarea zonelor aceluiași material se datoresc diferențelor între solicitările care se manifestă asupra zonelor [5].

Există și corpuri lichide cu comportare plastică (suspensii, vopsele, soluții etc). Acestea încep să curgă numai după ce solicitarea egalează pragul de curgere (v. § 1.2.2.8).

Răspunsul unor corpuri reale la solicitări se prezintă sub forma unor curbe (v. fig. 2.5, *a*), cărora le corespund ecuații prea complicate pentru a putea fi utilizate în rezolvarea unor probleme practice. Simplificarea ce se poate face, constă în liniarizarea curbelor pe anumite porțiuni. O astfel de diagramă va fi formată dintr-o succesiune de linii drepte (fig. 2.5, *b* și *c*). Segmentele OA din fig. 2.5, *b* corespund deformărilor perfect elastice, iar segmentele AB — deformării plastice. Linia *1* corespunde unui corp *elastoplastic ecruisabil*, pe cînd linia *2* descrie comportarea corpurilor *elasto- perfect plastice*.

Unele corpuri prezintă deformații elastice foarte mici, în comparație cu deformația totală și din această cauză se pot neglija. Acestea sînt corpurile *rigid-plastice* sau, mai simplu, „plastice". În fig. 2.5, *c* s-a reprezentat comportarea unui corp *rigid-plastic ecruisabil*, linia *1*, și a unui corp *rigid-perfect plastic*, linia *2*. Corpul a cărui comportare este descrisă de linia *2* se numește *perfect plastic* sau *plasticul lui St. Venant*. El face parte din categoria corpurilor cu proprietăți unitare, întrucît posedă numai plasticitate.

În teoria elasticității, deformațiile finite dau naștere la unele complicații în analiza matematică. În teoria corpurilor perfect plastice, deformațiile finite nu prezintă dificultăți, deoarece problemele sînt abordate ca și în cazul curgerii lichidelor viscoase.

Comportarea plastică se manifestă la eforturi unitare limită. La starea de solicitare limită, coeficientul de material ce caracterizează trecerea în starea plastică este limita de curgere τ_0 a corpului studiat.

Se definește o limită de curgere la tracțiune τ_{0t} și o limită de curgere la forfecare τ_{0f}. Starea de solicitare tridimensională este deter-

minată de șase componente ale tensorului tensiune sau de trei tensiuni principale, în raport cu axele principale. Numărul de combinări între eforturi la care apare starea plastică este infinit. Totalitatea acestora, în sistemul de axe principale, reprezintă o suprafață numită *suprafața limită a deformațiilor plastice*. Relațiile ce caracterizează suprafața limită a deformațiilor plastice se stabilesc pe baza unor ipoteze, dintre care: ipoteza constanței eforturilor unitare tangențiale maxime* și ipoteza energetică** sînt cele mai importante [4].

Conform primei ipoteze, tensiunea tangențială maximă τ_{max}, corespunzătoare trecerii la starea plastică este egală cu limita de curgere τ_0, care are o valoare constantă pentru corpul studiat și este independentă de valoarea absolută a solicitărilor. Mărimea maximă a tensiunilor tangențiale, funcție de tensiunile principale, este dată de

$$\tau_{12} = \frac{\tau''_{11} - \tau''_{22}}{2}; \quad \tau_{23} = \frac{\tau''_{22} - \tau''_{33}}{2}; \quad \tau_{31} = \frac{\tau''_{22} - \tau''_{11}}{2} \tag{2.25}$$

La solicitări de intindere $\tau_{22} = \tau_{33} = 0$ și $\tau_{11} = \tau_{0t}$ și pe baza ipotezei enunțate se poate scrie:

$$\tau_{0f} = \tau_{0t}/2 \tag{2.26}$$

Relațiile (2.25) pentru trecerea la starea plastică devin

$$\begin{aligned} \tau''_{11} = \tau''_{22} &= \tau_{0t} = 2\tau_{0f} \\ \tau''_{22} - \tau''_{33} &= \tau_{0t} = 2\tau_{0f} \\ \tau''_{33} - \tau''_{11} &= \tau_{0t} = 2\tau_{0f} \end{aligned} \tag{2.27}$$

Satisfacerea unei singure condiții din (2.27) este suficientă. Pentru starea de solicitare plană, condiția de plasticitate va lua forma

$$(\tau''_{11} - \tau''_{22})^2 = (\tau_{xx} - \tau_{zz})^2 + 4\tau^2_{xz} = \tau^2_{0t} = 4\tau^2_{0f} \tag{2.28}$$

În conformitate cu ipoteza energetică a plasticității, materialul trece în stare plastică atunci cînd energia de schimbare a formei atinge o anumită valoare critică independentă de natura stării de tensiune. Condiția de plasticitate, într-un sistem cartezian, ia forma [2]:

$$(\tau_{xx} - \tau_{yy})^2 + (\tau_{yy} - \tau_{zz})^2 + (\tau_{zz} - \tau_{xx})^2 + 6(\tau^2_{xy} + \tau^2_{yz} + \tau^2_{zx}) = 2\tau^2_{0t} \tag{2.29}$$

---

* Condiția de plasticitate Tresca-St. Venant.
** Condiția de plasticitate Huber-Misis-Henoky.

Scanned with OKEN Scanner

care, pentru forfecare pură, se simplifică la

$$\tau_{xy} = \tau_{0t}/\sqrt{3} \tag{2.30}$$

Ecuația reologică a unui corp omogen și izotrop, cu comportare perfect plastică are forma [2]:

$$\tau_{ij} = \frac{2\tau_0}{\Gamma}\gamma_{ij} + \left(E_v - \frac{2}{3}\frac{\tau_0}{\Gamma}\right)\gamma_v \delta_{ij} \tag{2.31}$$

în care γ_{ij} sînt componentele tensorului deformațiilor (v. tab. 1.2), γ_x deformația volumică, E_v modulul de elasticitate volumică și Γ intensitatea deformațiilor la forfecare

$$\Gamma = \sqrt{\frac{2}{3}}\sqrt{(\gamma_{xx}-\gamma_{yy})^2+(\gamma_{yy}-\gamma_{zz})^2+(\gamma_{zz}-\gamma_{xx})^2+\frac{3}{2}(\gamma_{xy}^2+\gamma_{yz}^2+\gamma_{zx}^2)} \tag{2.32}$$

Compontentele tensorului tensiunii exprimate de ecuația (2.31) sînt funcții univoce de componentele deformației și satisfac, în același timp, condiția energetică de plasticitate [2]. În tabelul 2.5 sînt scrise componentele ecuației (2.31).

Se consideră un corp cu comportare perfect plastică supus la forfecare simplă. Tensiunile acționează după direcția x pe plane normale la axa y. În acest caz $\gamma_{xx} = \gamma_{yy} = \gamma_{zz} = \gamma_{yz} = \gamma_{zx} = 0$, intensitatea defor-

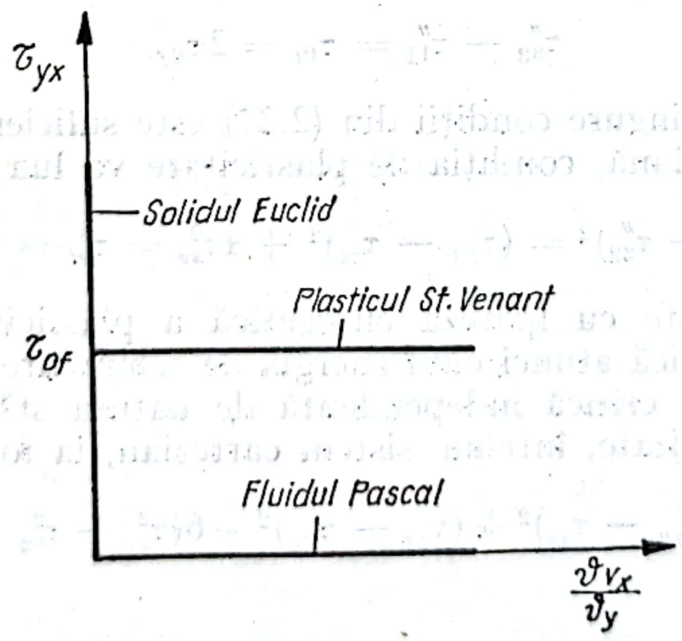


Fig. 2.6. Plasticul St. Venant solicitat la forfecare simplă.

Scanned with OKEN Scanner

Tabelul 2.5

Legea generalizată a plasticului St. Venant (componentele tensorului tensiunilor)*)

Componente	Expresia componentei
Normale	$\tau_{xx} = \frac{2\tau_0}{\Gamma}\gamma_{xx} + \left(E_v - \frac{2}{3}\frac{\tau_0}{\Gamma}\right)\gamma_v$
	$\tau_{yy} = \frac{2\tau_0}{\Gamma}\gamma_{yy} + \left(E_v - \frac{2}{3}\frac{\tau_0}{\Gamma}\right)\gamma_v$
	$\tau_z^z = \frac{2\tau_0}{\Gamma}\gamma_{zz} + \left(E_v - \frac{2}{3}\frac{\tau_0}{\Gamma}\right)\gamma_v$
Tangențiale	$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \frac{2\tau_0}{\Gamma}\gamma_{xy}$
	$\tau_{yz} = \tau_{zy} = \frac{2\tau_0}{\Gamma}\gamma_{yz}$
	$\tau_{zx} = \tau_{xz} = \frac{2\tau_0}{\Gamma}\gamma_{zx}$

* Notații: $\gamma_v = \gamma_{xx} + \gamma_{yy} + \gamma_{zz}$ și

$$\Gamma = \sqrt{\frac{2}{3}}\sqrt{(\gamma_{xx}-\gamma_{yy})^2 + (\gamma_{yy}-\gamma_{zz})^2 + (\gamma_{zz}-\gamma_{xx})^2 + \frac{3}{2}(\gamma_{yx}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2)}$$

mațiilor la forfecare devine $\Gamma = \gamma_{yx}$ și ecuația reologică a plasticului St. Venant va fi

$$\tau_{yx} = \tau_{0f} \tag{2.33}$$

în care τ_{0f} este pragul de tensiune la forfecare.

În figura 2.6 s-a reprezentat răspunsul plasticului St. Venant la forfecare simplă. Pentru $\tau_{yx} < \tau_{0f}$ corpul se comportă ca un corp rigid (solidul lui Euclid). În momentul în care solicitarea egalează pragul de tensiune, conform ecuației (2.33), corpul se deformează. Deformația este nerecuperabilă. Plasticul St. Venant nu suportă tensiuni mai mari decît τ_0.

Substituția ecuațiilor reologice (2.31) în ecuațiile de conservare a impulsului (v. tab. 1.6), conduce la ecuațiile diferențiale ale curgerii plastice (v. tab. 1.14).

Scanned with OKEN Scanner

BIBLIOGRAFIE

1. BIRD, B. R., STEWART, W. E. și LIGHTFOOT, E. N., *Transport phenomena*, New York, John Wiley and Sons, 1960
2. CATCHANOV, L., *Eléments de la téorie de la plasticité*, Moscou, Editions Mir, 1975
3. COLEMAN, B. D., MARKOVITZ, H. și NOLL, W., *Viscometric flows of non-newtonian fluids. Theory and experiments*, Berlin, Springer-Verlag, 1966
4. DRĂGAN, I., *Tehnologia deformărilor plastice*, București, Editura didactică și pedagogică, 1976.
5. FREDRICKSON, A. G., *Principles and applications of rheology*, Englewood Cliffs, New Jersey, Prentice-Hall, Inc. 1964.
6. McKelvey, J. M., *Polymer Processing*, New York, John Wiley and Sons, 1962.
7. MIDDLEMAN S., *The flow of high polymers. Continuum and molecular rheology*, New York, Interscience Publishers, 1968.
8. REINER, M. *Deformation, strain and flow*, Second edition, London, H. K. Lewis and Co., Ltd., 1960.
9. SLATTERY, J. C. *Momentum, energy and mass transfer in continua*, New York, McGraw-Hill, 1972.
10. TEODORESCU, P. P. și ILLE, V. *Teoria elasticității și introducere în mecanica solidelor deformabile*, Cluj-Napoca, Editura Dacia, 1976.
11. TRUESDELL, C. În: Comm. Pure. Appl. Math. 8, 1955, p. 123.

Scanned with OKEN Scanner

3

MODELE ANALOGE

3.1. INTRODUCERE

Abordarea teoretică a problemelor de comportare reologică a materialelor reale se face pe baza corpurilor cu proprietăți unitare. Comportarea lichidului lui Newton, a solidului lui Hooke și a plasticului lui St. Venant este descrisă cu ajutorul unor ecuații liniare. Similitudinea dintre aceste ecuații și ecuațiile ce descriu mișcarea sau fenomenele caracteristice unor elemente sau dispozitive simple, a permis acceptarea lor ca modele analoge. Dacă se compară comportarea reologică a unui corp cu comportarea unui element sau un grup de elemente — mecanice sau electrice — sistematizate într-o anumită ordine, se constată analogia comportărilor. Astfel de elemente formează *modele analoge*, cu ajutorul cărora se reproduce răspunsul corpurilor reale la solicitări mecanice [1, 2, 4—6].

Structura unui model analog nu are nimic comun cu structura corpului studiat. El poate, însă, reproduce comportarea acestuia și permite separarea părții din deformație care revine componentei elastice, instantanee sau întîrziate, curgerii vîscoase sau componentei plastice.

Modelul analog al unui corp se stabilește prin calcul, pe baza datelor experimentale. De asemenea, se construiesc modele din mai multe elemente interschimbabile, grupate după o anumită schemă și se experimentează în diverse condiții, prin modificarea parametrilor și a schemei. Modelul analog va fi acela ce va furniza un răspuns similar cu a corpului real, cu alte cuvinte curbele se vor suprapune. Din acest punct de vedere sînt preferate modelele electrice care oferă experimentatorului mai multe posibilități de modificare a parametrilor și de regrupare a

Scanned with OKEN Scanner

elementelor. Modelele mecanice, în schimb, sînt preferate, datorită faptului că sînt mult mai sugestive și permit vizualizarea și separarea componentelor deformației.

Modelele mecanice sînt formate din unul sau mai multe elemente supuse la forțe de tracțiune. Ele reproduc prin alungire deformațiile corpurilor supuse la tracțiune, forfecare sau compresie. Efortul ce solicită corpul este asimilat cu forța ce lucrează asupra modelului.

Elementele mecanice ce reproduc comportarea corpurilor reale prin ipotezele simplificatoare, sînt lipsite de masă. La solicitări periodice cu frecvența ridicată trebuie luată în considerație inerția corpului. În acest caz inerția se asimilează cu o masă atașată la model.

3.2. MODELE MECANICE

Modelarea comportării reologice a corpurilor reale se face frecvent cu ajutorul modelelor mecanice. Ele ușurează vizualizarea și înțelegerea răspunsului la solicitări.

Reproducerea comportării unor corpuri reale se realizează cu modele mecanice formate din mai multe elemente. Fiecare element constituie modelul unui corp cu comportare ideală. Deci modelarea se bazează pe conceptul de corp cu proprietate unitară.

Răspunsul unui model mecanic la o forță de tracțiune depinde în primul rînd de tipul și numărul de elemente din care este format, iar în al doilea rînd, de modul cum sînt legate. Construirea și experimentarea modelelor mecanice nu este prea comodă. Deși elementele sînt simple, se cere o mare precizie în execuția lor. În unele puncte de sprijin ce trebuie să permită deplasarea părților mobile apar forțe de frecare nedorite, care preiau o parte din forța aplicată. Din această cauză, modelele mecanice nu sînt folosite în scop experimental. În schimb, pe baza unei scheme a modelului mecanic se poate stabili modelul matematic ce constituie funcția răspuns la solicitare.

3.2.1. DESCRIEREA MODELELOR

Modelele mecanice ce reproduc comportarea corpurilor reale sînt formate din mai multe elemente. Fiecare element descrie comportarea unui corp cu proprietăți unitare sau limitează solicitarea, deformarea

Scanned with OKEN Scanner

sau viteza de deformare. Elementele mecanice cel mai frecvent folosite se bazează pe analogia între reacția lor la acțiunea forțelor externe și comportarea corpurilor cu proprietăți unitare.

3.2.1.1. Modelul lichidului lui Newton

Modelul mecanic al fluidelor cu comportare newtoniană este un *amortizor*. El este format dintr-un recipient cilindric, umplut cu un lichid newtonian, în care se deplasează un piston într-o manieră care exclude apariția turbulenței. Între partea fixă și cea mobilă a amortizorului nu există puncte de contact, ceea ce evită apariția unor forțe de frecare. Sistemul este astfel construit încît efectele inerțiale, gravitaționale și de capăt sînt neglijabile.

Forța F_1 aplicată tijei determină deplasarea pistonului și trecerea lichidului din față în spate, prin interstițiul de lîngă peretele cilindrului (fig. 3.1). Deplasarea crește continuu în timp, iar viteza de deplasare este constantă. La aplicarea unei forțe, amortizorul nu reacționează instantaneu. Viteza de deplasare este constantă atît timp cît forța este constantă. Între forța și viteza de deplasare există proporționalitate directă.

$$F_1 = k_1(\mathrm{d}L/\mathrm{d}t) \tag{3.1}$$

Coeficientul k_1 reprezintă constanta amortizorului și $\mathrm{d}L/\mathrm{d}t$ viteza de deplasare. Comparînd ecuația amortizorului cu ecuația lichidului newtonian supus la forfecare simplă [v. ec. (2.11)], se constată, pe baza iden-

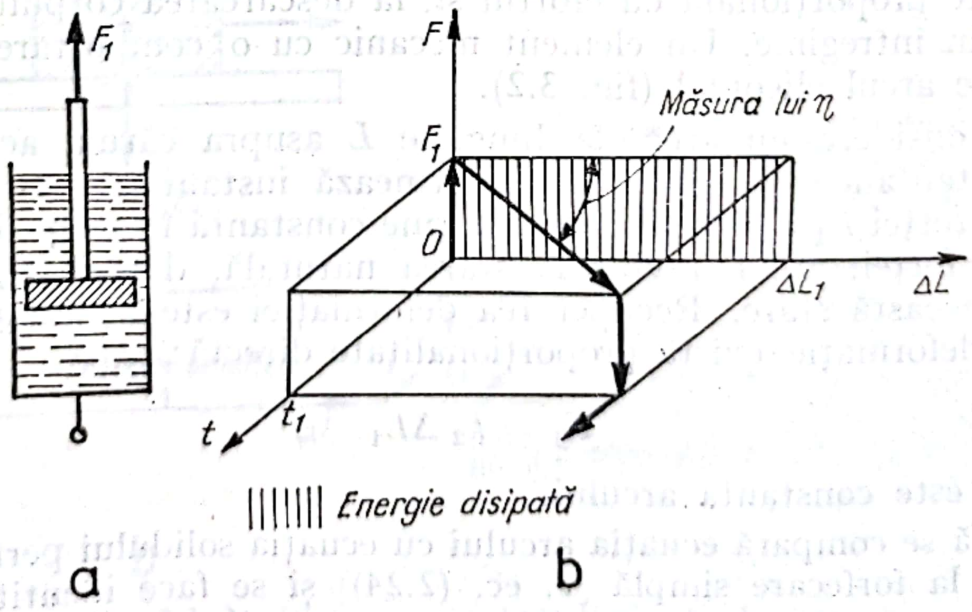


Fig. 3.1. Modelul mecanic al fluidului lui Newton:
a — amortizor; *b* — reprezentare spațială a comportării amortizorului

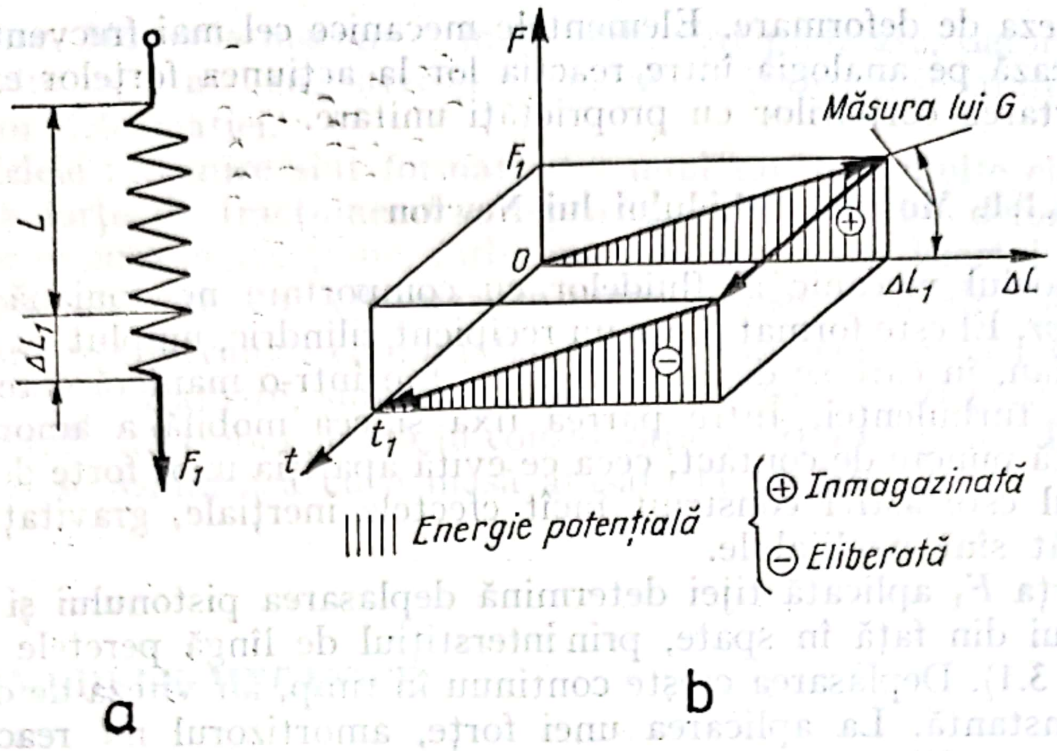


Fig. 3.2. Modelul mecanic al solidului Hooke:
a — arc *b* — reprezentarea spațială a comportării arcului.

tității parametrilor solicitării, că au aceeași formă, Astfel, amortizorul este considerat analogul mecanic al lichidului lui Newton.

3.2.1.2. Modelul solidului lui Hooke

Solidul lui Hooke posedă numai elasticitate instantanee. Deformația este proporțională cu efortul și, la descărcarea corpului, se recuperează în întregime. Un element mecanic cu o comportare asemănătoare este arcul elicoidal (fig. 3.2).

Se consideră un arc* de lungime L asupra căruia acționează o forță instantanee F_1. Arcul se deformează instantaneu cu ΔL_1. Sub acțiunea forței F_1 deformația se menține constantă în timp. După îndepărtarea forței, arcul revine la starea naturală, datorită „memoriei" față de această stare. Recuperarea deformației este instantanee. Între forță și deformație există proporționalitate directă:

$$F_1 = k_2 \Delta L_1 \tag{3.2}$$

unde k_2 este constanta arcului.

Dacă se compară ecuația arcului cu ecuația solidului perfect elastic solicitat la forfecare simplă [v. ec. (2.24)] și se face identitatea între

* Noțiunile de arc sau resort sînt identice.

Scanned with OKEN Scanner

parametrii solicitării, rezultă că *arcul* este analogul mecanic al solidului Hooke.

Funcția de model mecanic analog presupune că arcul se deformează elastic pe întregul domeniu de solicitări. Masa acestuia este extrem de redusă, încît forțele inerțiale și gravitaționale pot fi neglijate.

3.2.1.3. Modelul plasticului lui St. Venant

Corpul perfect plastic se deformează ireversibil numai după ce efortul a atins pragul de tensiune. Astfel se poate face analogia între plasticitate și fenomenul mecanic de alunecare prin frecare.

Un corp așezat pe o suprafață plană, orizontală, asupra căruia acționează forța F_1, este pus în mișcare numai cînd forța aplicată egalează forța de frecare F_f(fig. 3.3, *a*).

$$F_1 = F_f \tag{3.3}$$

Această ecuație este analogă cu ecuația reologică a plasticului St. Venant solicitat la forfecare simplă [v. ec. (2.33)], iar *corpul cu frecare* reprezintă modelul mecanic al acestuia.

Forța de frecare este dată de relația $F_f = \mu_f Mg$, în care M este masa corpului, g accelerația gravitației și μ_f coeficientul de frecare. Valoarea forței de frecare în condiții statice este maximă (fig. 3.3, *b*), deoarece coeficientul de frecare are valoarea cea mai mare. În cazul corpului cu frecare ce formează modelul analog al plasticului St. Venant se con-

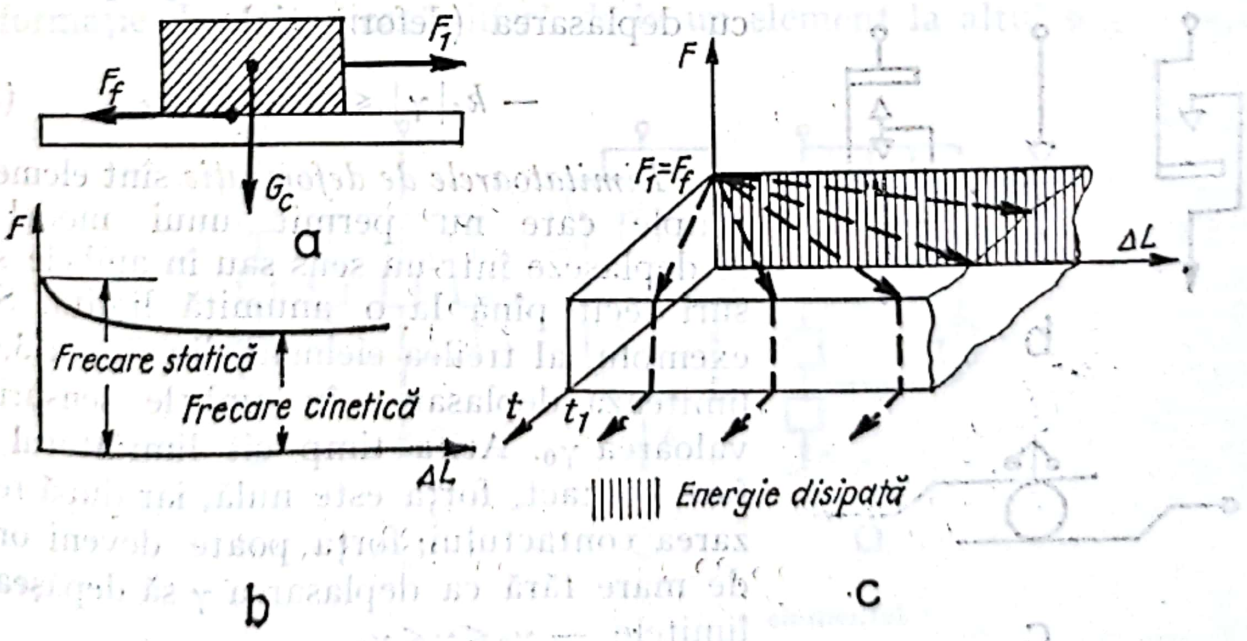


Fig. 3.3. Modelul mecanic al plasticului St. Venant:
a — corpul cu frecare (patina); *b* — frecare statică și cinetică; *c* — reprezentarea spațială a comportării corpului cu frecare.

Scanned with OKEN Scanner

sideră că valoarea coeficientului de frecare este constantă și că forțele inerțiale sînt neglijabile. Modelul poate fi considerat un limitator de efort, deoarece nu poate prelua forțe mai mari decît forța de frecare. Valoarea absolută a tensiunii nu poate fi mai mare decît pragul de curgere $\tau_0 (-\tau_0 \leqslant \tau \leqslant +\tau_0)$, iar viteza de deformare poate să varieze în limite foarte largi (fig. 3.3, *c*).

Funcție de valoarea coeficientului de frecare, valoarea pragului de curgere poate să varieze în limite foarte largi. Dacă se dă coeficientului de frecare valori extreme, se ajunge la corpurile ideale: solidul lui Euclid pentru $\mu_f = \infty$ și lichidul lui Pascal pentru $\mu_f = 0$. Pragul de tensiune al plasticului St. Venant va avea valori situate între cele două limite.

3.2.1.4. Alte modele

Modelele mecanice ale corpurilor cu comportare ideală sînt insuficiente pentru a reproduce larga gamă de răspunsuri ale materialelor reale. Școala franceză de reologie [3, 4] a introdus o serie de elemente mecanice, simple, cu ajutorul cărora se limitează fie o tensiune, fie o deformație, fie o viteză de deformare (fig. 3.4). Asocierea lor cu celelalte modele mecanice lăgesc posibilitățile de modelare a comportărilor reologice.

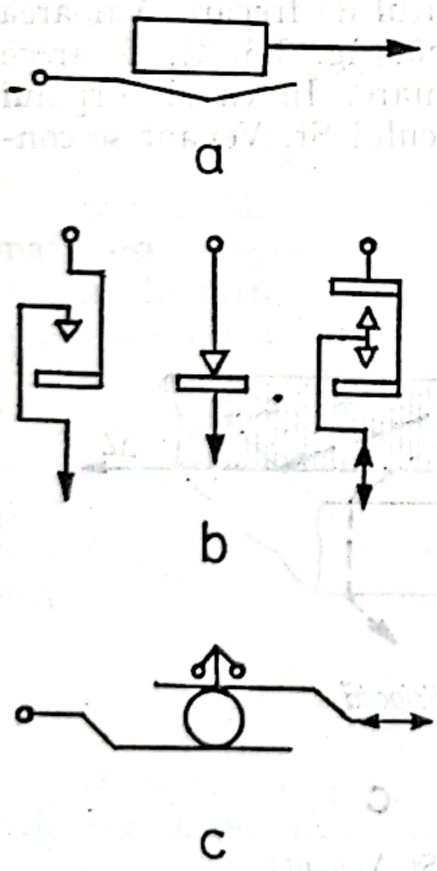


Fig. 3.4. Alte modele mecanice.

Patina lui Képès (fig. 3.4, *a*) este formată dintr-un corp cu frecare fără prag de tensiune. Modelul este conceput în așa fel încît forța de frecare este proporțională cu deplasarea (deformația):

$$-k_f|\gamma| \leqslant \tau \leqslant |\gamma| k_f \qquad (3.4)$$

Limitatoarele de deformație sînt elemente simple care nu permit unui model să se deplaseze într-un sens sau în ambele sensuri decît pînă la o anumită limită. Spre exemplu, al treilea element din figura 3,4, *b* limitează deplasarea în ambele sensuri la valoarea γ_0. Atîta timp cît limitatorul nu face contact, forța este nulă, iar după realizarea contactului; forța poate deveni oricît de mare fără ca deplasarea γ să depășească limitele $-\gamma_0 \leqslant \gamma \leqslant \gamma_0$.

Limitatoarele de viteză (fig. 3.4, *c*) nu opun nici o rezistență la deformare peste

Scanned with OKEN Scanner

o anumită viteză limită $\dot{\gamma}$. Chiar dacă forța devine foarte mare, viteza limită nu poate fi depășită — $\dot{\gamma}_0 \leqslant \dot{\gamma} \leqslant \dot{\gamma}_0$.

3.2.2. GRUPAREA ELEMENTELOR ÎN MODELE

Amortizorul, arcul elicoidal și corpul cu frecare sînt modelele analoge ale corpurilor cu proprietăți unitare și cu comportare liniară. Ele sînt cele mai simple elemente mecanice cu ajutorul cărora se poate reproduce răspunsul unui corp la solicitări simple. Modelul unui corp cu proprietăți multiple va fi format din două sau mai multe elemente mecanice grupate în diverse moduri. Cel mai frecvent sînt utilizate grupările în serie și în paralel (fig. 3.5, *a* și *b*).

Gruparea în serie permite separarea fiecărui tip de deformație. Forța aplicată modelului se transmite în întregime fiecărui element din model, în timp ce deformația totală este egală cu suma deformațiilor elementelor componente. Pentru modelul format din trei elemente înseriate (fig. 3.5, *a*) deformația totală va fi

$$\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 \tag{3.5}$$

în care γ_1, γ_2, γ_3 sînt deformațiile (deplasările) elementelor. Generalizarea modelului format din trei elemente înseriate se face prin legarea în paralel a unei infinități de astfel de modele.

Gruparea în paralel impune ca toate elementele să prezinte aceiași deformație. Forța aplicată diferă de la un element la altul și este egală

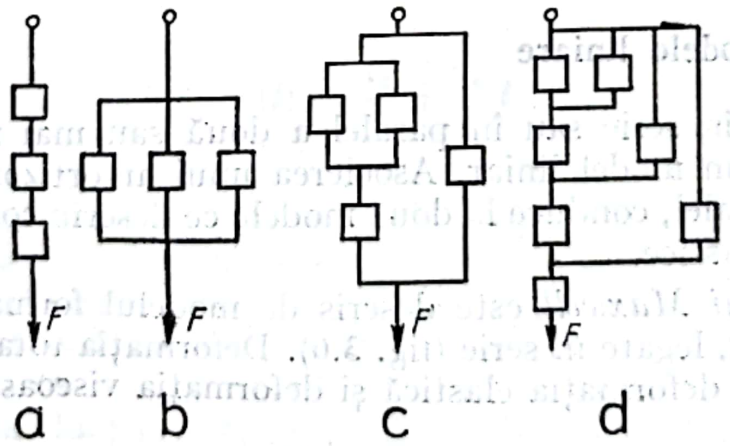


Fig. 3.5. Moduri de grupare a elementelor în modele:
a — elemente în serie; *b* — elemente în paralel; *c* — elemente în serie-paralel; *d* — elemente în scară.

Scanned with OKEN Scanner

cu suma forțelor ce acționează asupra elementelor. Un model format din trei elemente paralele (fig. 3.5, *b*) va fi solicitat de o tensiune totală

$$\tau = \tau_1 + \tau_2 + \tau_3 \tag{3.6}$$

unde τ_1, τ_2, τ_3 sînt tensiunile ce solicită elementele. Generalizarea modelului format din elemente paralele se realizează prin legarea în serie a unei infinități de astfel de modele.

Gruparea elementelor într-un model se mai poate face în serie-paralel, în scară și întîmplător. Modelele mixte sau serie paralel se pot descompune în părți montate în serie și (sau) în paralel. Toate grupările mixte prezintă o comportare similară cu o grupare în serie sau cu o grupare în paralel, din această cauză sînt mai puțin folosite. Echivalența modelelor a făcut posibilă renunțarea la modelele mixte [3].

3.2.3. EXEMPLE DE MODELE

Modelele simple, formate dintr-un singur element, reproduc comportarea unui număr forate restrîns de corpuri și, de foarte multe ori, pe domenii limitate de solicitări. Asocierea mai multor elemente într-un model, lărgește gama posibilităților de a descrie comportarea corpurilor reale. Dar nu toate modelele analoge ce pot rezulta prin asocierea mai multor elemente vor reproduce răspunsul corpurilor reale.

Modelele mecanice ce se pot obține prin asocierea mai multor elemente pot conduce la corpuri cu comportare liniară sau neliniară. Corpurile cu comportare liniară sînt definite de o ecuație diferențială liniară [2].

3.2.3.1. Modele liniare

Gruparea în serie sau în paralel a două sau mai multe elemente liniare va da un model liniar. Asocierea unui amortizor cu un arc, în serie sau în paralel, conduce la două modele ce descriu comportarea unor corpuri viscoelastice.

Lichidul lui Maxwell este descris de modelul format dintr-un arc și un amortizor, legate în serie (fig. 3.6). Deformația totală este formată din suma între deformația elastică și deformația viscoasă.

$$\gamma = \gamma_e + \gamma_v \tag{3.7}$$

Se derivează ultima expresie în raport cu timpul

$$\dot{\gamma} = \dot{\gamma}_e + \dot{\gamma}_v$$

Scanned with OKEN Scanner

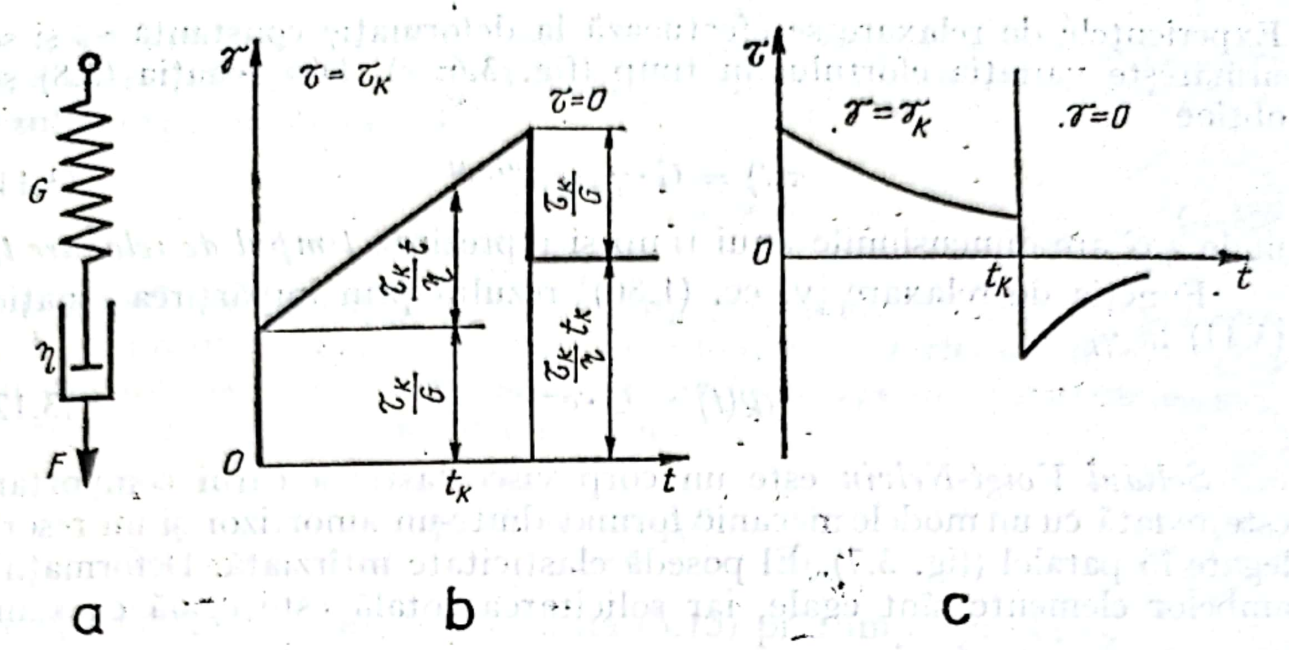


Fig. 3.6. Lichidul Maxwell:
a — modelul mecanic; *b* — curba de fluaj; *c* — curba de relaxare

și se înlocuiește componenta viscoasă cu viteza de deformare a lichidului Newton supus la forfecare simplă [v. ec. (2.11)] și componenta elastică rezultată prin derivarea ecuației (2.24)

$$\dot{\gamma} = \frac{\dot{\tau}}{G} + \frac{\tau}{\eta} \quad \text{sau} \quad \frac{d\gamma}{dt} = \frac{1}{G}\frac{d\tau}{dt} + \frac{\tau}{\eta} \tag{3.8}$$

O experiență de fluaj efectuată la solicitare constantă τ_k va da o deformație

$$\gamma(t) = \frac{\tau_k}{G} + \frac{\tau_k}{\eta} t \tag{3.9}$$

Primul termen, independent de timp, reprezintă deformația instantanee, iar al doilea termen deformația viscoasă. Ecuația reprezintă o dreaptă cu panta τ_k/η. La timpul t_k se îndepărtează solicitarea, deformația elastică este recuperată și corpul rămîne cu deformația viscoasă (fig. 3.6, *b*).

Funcția de fluaj [v. ec. (1.79)] se obține prin împărțirea ecuației (3.9) la τ_k

$$\mathcal{F}(t) = \frac{1}{G} + \frac{t}{\eta} \tag{3.10}$$

Scanned with OKEN Scanner

Experiențele de relaxare se efectuează la deformație constantă γ_k și se urmărește variația efortului în timp (fig. 3.6, *c*). Din ecuația (3.8) se obține

$$\tau(t) = G \cdot \gamma_k \cdot e^{-(G/\eta)t} \tag{3.11}$$

unde η/G are dimensiunile unui timp și reprezintă *timpul de relaxare* t_r.

Funcția de relaxare [v. ec. (1.80)] rezultă prin împărțirea ecuației (3.11) la γ_k

$$\mathcal{R}(t) = G \cdot e^{-t/t_r} \tag{3.12}$$

Solidul Voigt-Kelvin este un corp viscoelastic a cărui comportare este redată cu un modele mecanic format dintr-un amortizor și un resort, legate în paralel (fig. 3.7). El posedă elasticitate întîrziată. Deformațiile ambelor elemente sînt egale, iar solicitarea totală este egală cu suma

$$\tau = \tau_e + \tau_v \tag{3.13}$$

Substituind termenii din partea dreaptă a egalității cu componentele corespunzătoare din legea lui Hooke și legea lui Newton, simplificate pentru forfecare simplă, se obține

$$\tau = G\gamma + \eta\dot{\gamma} \quad \text{sau} \quad \tau = G\gamma + \eta \frac{d\gamma}{dt} \tag{3.14}$$

ecuația solidului Voigt-Kelvin.

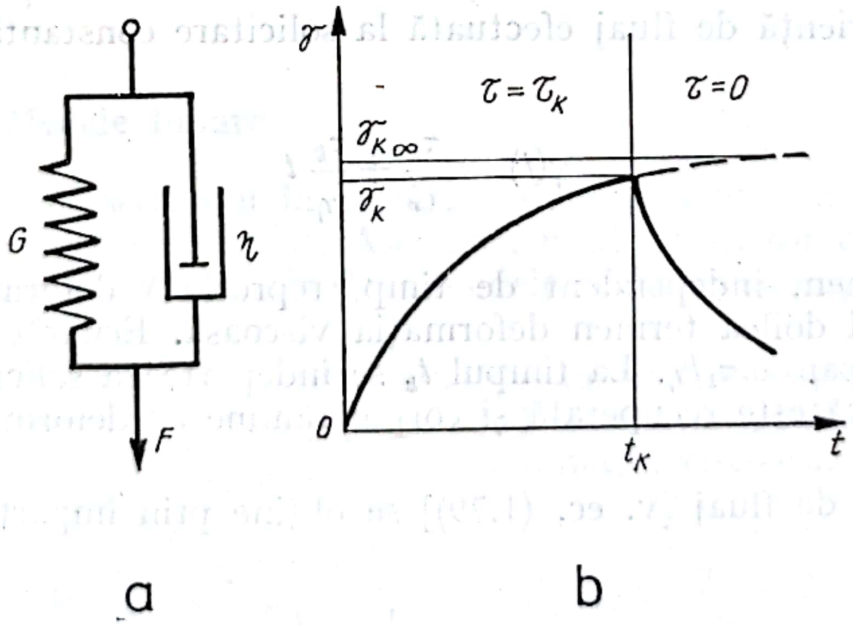


Fig. 3.7. Solidul Voigt-Kelvin:
a — modelul mecanic; *b* — curba de fluaj.

Sub acțiunea unei tensiuni constante τ_k, corpul se deformează tinzînd către o limită $\gamma_{k\infty}$ (fig. 3.7, *b*). Din ultima ecuație, după integrare, rezultă expresia deformației

$$\gamma(t) = \frac{\tau_k}{G}\left(1 - e^{-\frac{G}{\eta}t}\right) \tag{3.15}$$

în care η/G are dimensiunile unui timp și se numește *timp de întîrziere*, t_I. El reprezintă timpul în care deformația de forfecare atinge 63% din valoarea sa finală. Deformația maximă a corpului, sub acțiunea solicitării τ_k, rezultă din ultima ecuație:

$$\gamma(\infty) = \lim_{t\to\infty} \gamma(t) = \frac{\tau_k}{G} \tag{3.16}$$

Funcția de fluaj rezultă din ecuația (3.15) prin împărțire la τ_k

$$\mathcal{F}(t) = \frac{1}{G}\left(1 - e^{-t/t_I}\right) \tag{3.17}$$

unde t_I este timpul de întîrziere.

Funcția de relaxare pentru corpul Voigt-Kelvin nu are sens, întrucît la deformația constantă γ_k tensiunea nu relaxează.

Ecuația reologică stabilită cu ajutorul unui model format din mai multe elemente va conține un număr mai mare de termeni și mai mulți coeficienți de material. Obținerea ei este cu atît mai dificilă, cu cît modelul conține mai multe elemente. Metodica de deducere a acestor ecuații este exemplificată pe corpul Burgers, format din patru elemente (fig. 3.8).

Corpul Burgers se obține prin legarea în serie a unui model Maxwell cu un model Voigt-Kelvin. Prezența unui amortizor liber, a unui arc liber și a unui cuplu format dintr-un arc și un amortizor, conferă corpului viscozitate, elasticitate instantanee și, respectiv, elasticitate întîrziată. Modelul reproduce comportarea reologică a polimerilor amorfi liniari și a betoanelor.

Ecuația reologică diferențială a corpului se va deduce considerînd deformația totală γ egală cu suma deformațiilor modelului Maxwell γ_1 și a modelului Voigt-Kelvin γ_2:

$$\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 \tag{3.18}$$

Ultima ecuație se derivă de două ori, în raport cu timpul

$$\frac{d\gamma}{dt} = \frac{d\gamma_1}{dt} + \frac{d\gamma_2}{dt} \tag{3.19}$$

Scanned with OKEN Scanner

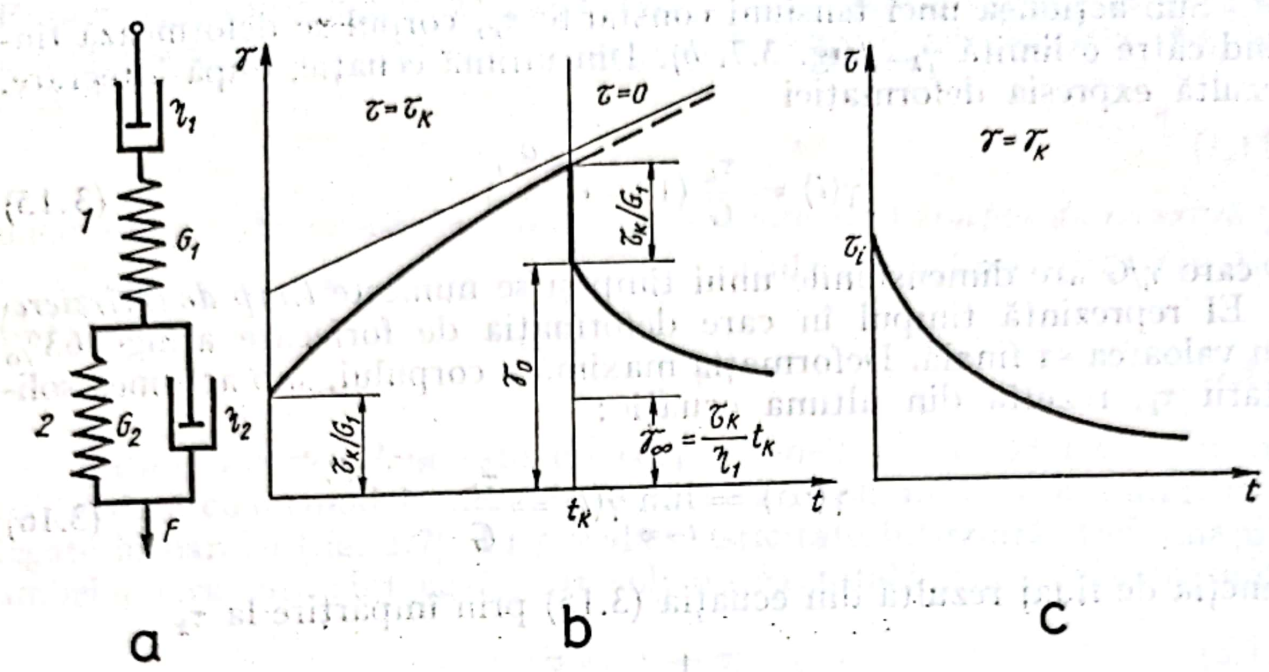


Fig. 3.8. Corpul Burgers:
a — modelul mecanic; *b* — curba de fluaj; *c* — curba de relaxare.

și

$$\frac{d^2\gamma}{dt^2}=\frac{d^2\gamma_1}{dt^2}+\frac{d^2\gamma_2}{dt^2} \tag{3.20}$$

Pentru a se elimina deformațiile γ_1 și γ: se folosesc ecuațiile reologice și derivatele lor în raport cu timpul, a lichidului Maxwell [v. ec. (3.8)]

$$\frac{d\gamma_1}{dt}=\frac{1}{G_1}\frac{d\tau}{dt}+\frac{\tau}{\eta_1} \tag{3.21}$$

$$\frac{d^2\gamma_1}{dt^2}=\frac{1}{G_1}\frac{d^2\tau}{dt^2}+\frac{1}{\eta_1}\frac{d\tau}{dt} \tag{3.22}$$

și a solidului Voigt-Kelvin

$$\tau=G_2\gamma_2+\eta_2\frac{d\gamma_2}{dt} \tag{3.23}$$

$$\frac{d\tau}{dt}=G_2\frac{d\gamma_2}{dt}+\eta_2\frac{d^2\gamma_2}{dt^2} \tag{3.24}$$

Derivata $d\gamma_1/dt$ din (3.21) se substituie în (3.19) și se obține

$$\frac{d\gamma_2}{dt}=\frac{d\gamma}{dt}-\frac{1}{G_1}\frac{d\tau}{dt}-\frac{\tau}{\eta_1} \tag{3.25}$$

Se elimină $d\gamma_2/dt$ din (3.24), folosind expresia (3.25)

$$\frac{d^2\gamma_2}{dt^2} = \frac{1}{\eta_2}\frac{d\tau}{dt} - \frac{G_2}{\eta_2}\left(\frac{d\gamma}{dt} - \frac{1}{G_1}\frac{d\tau}{dt} - \frac{\tau}{\eta_1}\right) \tag{3.26}$$

În ecuația (3.20) se substituie derivatele de ordinul doi ale deformațiilor cu expresiile date de (3.22) și (3.26). După rearanjarea termenilor rezultă:

$$\frac{d^2\tau}{dt^2} + \left[\frac{G_1}{\eta_1} + \frac{G_1}{\eta_2} + \frac{G_2}{\eta_2}\right]\frac{d\tau}{dt} + \frac{G_1G_2}{\eta_1\eta_2}\tau = G_1\frac{d^2\gamma}{dt^2} + \frac{G_1G_2}{\eta_2}\frac{d\gamma}{dt} \tag{3.27}$$

o ecuație diferențială de ordinul doi.

În experiențele de fluaj se aplică un efort constant τ_k și se urmărește evoluția deformației în timp. Ecuația (3.27) se simplifică la

$$\frac{d^2\gamma}{dt^2} + \frac{G_2}{\eta_2}\frac{d\gamma}{dt} - \frac{G_2}{\eta_1\eta_2}\tau_k = 0 \tag{3.28}$$

Prin aplicarea instantanee a efortului va apare o deformație instantanee

$$\gamma = \frac{\tau_k}{G_1} \quad \text{pentru } t = 0 \tag{3.29}$$

urmată de o deformație elastică întîrziată și o deformație viscoasă.

Viteza inițială de deformare este determinată de amortizoare

$$\dot{\gamma} = \frac{\tau_k}{\eta_1} + \frac{\tau_k}{\eta_2} \quad \text{la } t = 0 \tag{3.30}$$

După rezolvarea ecuației (3.28) cu condițiile de limită (3.29) și (3.30) se obține ecuația curbei de fluaj

$$\gamma(t) = \frac{\tau_k}{G_1} + \frac{\tau_k}{\eta_1}t + \frac{\tau_k}{G_2}(1 - e^{-t/t_1}) \tag{3.31}$$

și funcția de fluaj

$$\mathcal{F}(t) = \frac{1}{G_1} + \frac{t}{\eta_1} + \frac{1}{G_2}(1 - e^{-t/t_1}) \tag{3.32}$$

în care $t_1 = \eta_2/G_2$ și reprezintă timpul de întîrziere.

Primul termen din ecuația (3,31) este independent de timp și reprezintă deformația elastică instantanee corespunzătoare arcului liber. Din valoarea experimentală a deformației inițiale se calculează coefi-

Scanned with OKEN Scanner

cientul de material G_1 (fig. 3.8, *b*). Termenul al doilea reprezintă deformația vîscoasă, iar termenul al treilea deformația elastică întîrziată. Curba de fluaj tinde asimptotic către o dreaptă (pentru $t \to \infty$)

$$\gamma(t) = \tau_k \left(\frac{1}{G_1} + \frac{1}{G_2} \right) + \frac{\tau_k}{\eta_1} t \tag{3.33}$$

cu panta τ_k/η_1 și ordonata la orgine $\tau_k[(1/G_1R + (1/G_2)]$. Din panta dreptei se determină valoarea lui η_1, din ordonata la origine G_2 și din condiția (3.30) rezultă η_2.

După descărcarea corpului deformația τ_k/G_1 se recuperează instantaneu, iar deformația elastică întîrziată se recuperează lent în timp (v. fig. 3.8, *b*). Pentru $\tau = 0$ ecuația (3.27) devine

$$\frac{d^2\gamma}{dt^2} + \frac{G_2}{\eta_2} \frac{d\gamma}{dt} = 0 \tag{3.34}$$

Soluția ecuației diferențiale de fluaj invers va fi

$$\gamma(t) = \gamma_\infty + (\gamma_0 - \gamma_\infty) e^{-t/t_I} \tag{3.35}$$

în care γ_0 este deformația imediat după îndepărtarea solicitării, iar γ_∞ este deformația remanentă. Expresiile lor rezultă din ecuația (3.31) pentru $t = t_k$.

Într-o experiență de relaxare corpul este deformat și se urmărește scăderea tensiunii în timp, în condițiile menținerii unei deformații constante γ_k(fig. 3.8, *c*). Din (3.27), prin simplificare se obține

$$\frac{d^2\tau}{dt^2} + \left[\frac{G_1}{\eta_1} + \frac{G_1}{\eta_2} + \frac{G_2}{\eta_2} \right] \frac{d\tau}{dt} + \frac{G_1 G_2}{\eta_1 \eta_2} \tau = 0 \tag{3.36}$$

o ecuație diferențială, omogenă, cu coeficienții constanți.

Solicitarea inițială τ_i necesară pentru o deformație γ_k, ținînd cont că singurul element ce se poate deforma instantaneu este arcul liber, va fi

$$\tau_i = G_1 \gamma_k \quad \text{la} \quad t = 0 \tag{3.37}$$

Întrucît deformația totală rămîne constantă, elementele din modelul Voigt-Kelvin și amortizorul liber se deformează, iar arcul liber începe să recupereze o parte din deformație, se poate scrie

$$\frac{d\tau}{dt} = -G_1 \gamma_k \left(\frac{G_1}{\eta_1} + \frac{G_1}{\eta_2} \right) \quad \text{pentru } t = 0 \tag{3.38}$$

Scanned with OKEN Scanner

Ecuația curbei de relaxare se obține din ecuația (3.36) și condițiile de limită (3.37) și (3.38)

$$\tau = G_1 \gamma_k \, e^{-\frac{A}{2}t}\left[e^{\frac{k}{2}t} - \frac{1}{k}\left(A + K - 2\frac{G_1}{\eta_2}\right)\right] \mathrm{sh}\left(\frac{K}{2}t\right) \qquad (3.39)$$

în care s-au făcut următoarele notații

$$A = \frac{G_1}{\eta_1} + \frac{G_1}{\eta_2} + \frac{G_2}{\eta_2}$$

$$B = \frac{G_1 G_2}{\eta_1 \eta_2}$$

$$K = \sqrt{A^2 - 4B}$$

Funcția de relaxare rezultă prin împărțirea ecuației (3.39) la γ_k

$$\mathcal{R}(t) = G_1 \, e^{-\frac{K}{2}t}\left[e^{\frac{K}{2}t} - \frac{1}{K}\left(A + K - 2\frac{G_1}{\eta_2}\right) \mathrm{sh}\left(\frac{K}{2}t\right)\right. \qquad (3.40)$$

Tensiunea scade lent și, după un timp foarte mare, se anulează.

3.2.3.2. Modele neliniare

Modelele mecanice ce au în componența lor un corp cu frecare, limitatoare de deformație sau de viteză de deformare, sînt neliniare [2]. Cu ajutorul lor se reproduce comportarea corpurilor solide sau lichide.

Modelele din figura 3.9 corespund unor corpuri cu modul de elasticitate variabil, dependent de deformație. O forță crescătoare aplicată primului model deformează ambele resoarte. Dependența între tensiune și deformație este dată de expresia

$$\tau = \frac{1}{J_{G_1} + J_{G_2}} \gamma \qquad (3.41)$$

unde J_{G_1} și J_{G_2} sînt complianțele la forfecare simplă a resoartelor. Cînd deformația primului resort este blocată de limitatorul cu care este legat în paralel — punctul B — în continuare se deformează numai al doilea resort și panta dreptei se modifică la $1/J_{G_2}$, ceea ce echivalează cu o

Scanned with OKEN Scanner

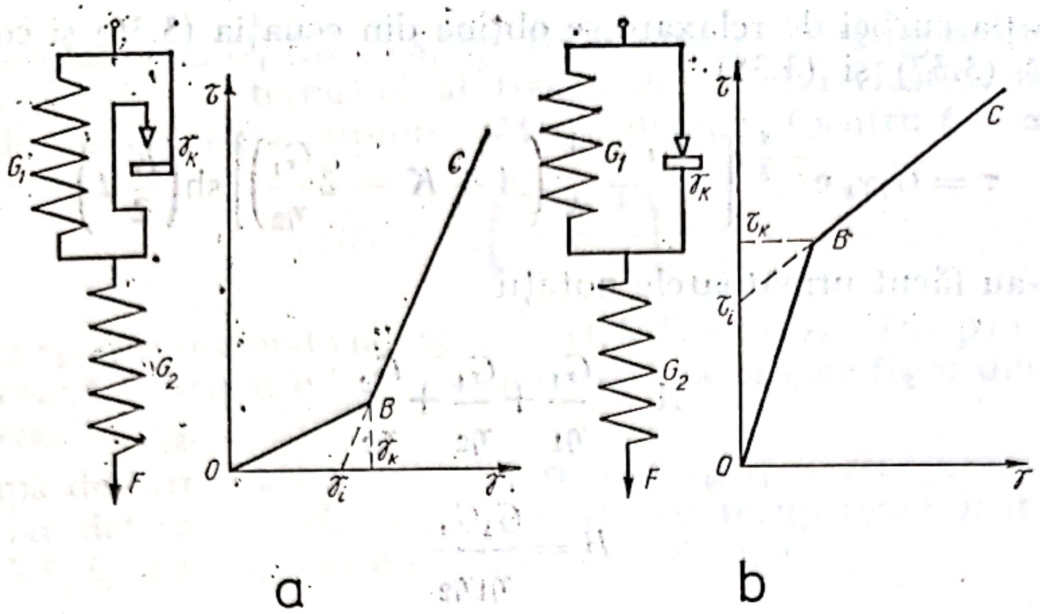


Fig. 3.9. Corpuri cu elasticitate neliniară:
a — modul de elasticitate crescător; *b* — modul de elasticitate descrescător.

creștere a modului de elasticitate. Dreapta BC intersectează abscisa în punctul

$$\gamma_i = \gamma_k \frac{J_{G_1}}{J_{G_1} + J_{G_2}} \tag{3.42}$$

în care γ_k este deformația maximă a primului resort, respectiv, o mărime specifică limitatorului de deformație.

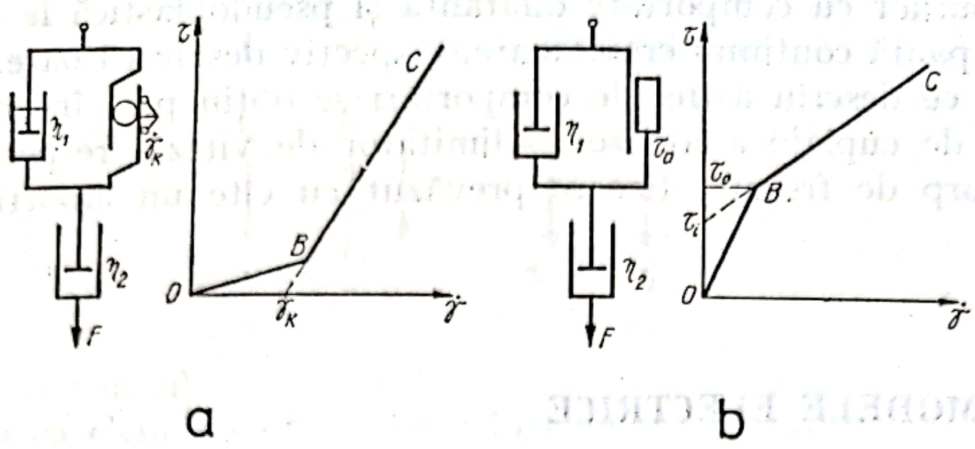
Modelul din figura 3.9, *b* este prevăzut cu un resort pretensionat. Limitatorul de deformație nu permite primului resort să revină la starea sa naturală. Prin aplicarea unei forțe se deformează numai al doilea resort (linia OB). În punctul B forța aplicată egalează forța de pretensionare a primului resort și la forțe mai mari se deformează ambele resoarte. Aceasta echivalează cu o scădere a modulului de elasticitate (dreapta BC). Dreapta BC intersectează ordonata în τ_i

$$\tau_i = \tau_k \frac{J_{G_1}}{J_{G_1} + J_{G_2}} \tag{3.43}$$

Notația τ_k corespunde forței de pretensionare a primului resort $\tau_k = G_1\gamma_k$, în care γ_k este deformația inițială impusă de limitator.

Modelele din figura 3.10 redau comportarea a două corpuri lichide cu viscozitate dependentă de parametrii solicitării. Comportarea neliniară se datorește limitatorului de viteză de deformare și corpului cu frecare.

Scanned with OKEN Scanner



a b

Fig. 3.10. Corpuri cu vîscozitate neliniară:
a — vîscozitate crescătoare (dilatant); *b* — vîscozitate descrescătoare (pseudoplastic).

Prin aplicarea unei forțe continuu crescătoare, viteza de deformare a ambelor amortizoare crește, atîta timp cît viteza primului amortizor este mai mică decît $\dot{\gamma}_k$. Viteza totală de deformare este egală cu suma vitezelor individuale, ca în cazul înserierii amortizoarelor.

$$\tau = \frac{\eta_1 \eta_2}{\eta_1 + \eta_2} \dot{\gamma} \tag{3.44}$$

Fracția reprezintă o constantă și comportarea este newtoniană, (dreapta *OB*). Peste o anumită limită a vitezei de forfecare, limitatorul menține constantă viteza primului amortizor și panta crește, (dreapta *BC*); corpul manifestă comportare dilatantă. Ecuația dreptei *BC* va fi

$$\tau = \eta_2(\dot{\gamma} - \dot{\gamma}_k) \tag{3.45}$$

Modelul din figura 3.10, *b* descrie un corp ce manifestă comportare pseudoplastică. La solicitări mici, pentru care $\tau < \tau_0$ se deformează numai al doilea amortizor și comportarea este newtoniană, (dreapta OB)

$$\tau = \eta_2 \dot{\gamma} \tag{3.46}$$

Cînd tensiunea depășește pragul de curgere τ_0, se vor deforma ambele amortizoare (dreapta *BC*) și se obține

$$\tau = \tau_0 \frac{\eta_2}{\eta_1 + \eta_2} + \frac{\eta_1 \eta_2}{\eta_1 + \eta_2} \dot{\gamma} \tag{3.47}$$

în care primul termen din partea dreaptă a ecuației reprezintă ordonata la orgine τ_i a dreptei *BC*.

Scanned with OKEN Scanner

Corpurilor cu comportare dilatantă și pseudoplastică le corespund curbe cu pantă continuu crescătoare, respectiv descrescătoare. Modelele mecanice ce descriu astfel de comportări se obțin prin înserierea unei infinități de cuplaje amortizor — limitator de viteză, respectiv amortizor — corp de frecare, fiecare prevăzut cu cîte un amortizor liber.

3.3. MODELE ELECTRICE

Modelele electrice permit o reglare foarte ușoară și rapidă a tuturor parametrilor, iar răspunsul se poate obține imediat pe ecranul unui osciloscop. Modelarea electrică se face pe baza celor mai simple legi ale electricității. Exemplele următoare sînt edificatoare.

Analogia $U - \tau$, $Q - \gamma$ se bazează pe legea Ohm și ecuația condensatorului electric

$$\begin{array}{ccc} U = R \cdot I & & U = \dfrac{1}{C} Q \\ \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow & & \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\ \tau = \eta \quad \dot{\gamma} & & \tau = G \quad \gamma \end{array} \tag{3.48}$$

în care U este tensiunea electrică, R — rezistența electrică, I — intensitatea curentului electric, C — capacitatea condensatorului și Q — cantitatea de electricitate.

Între un amortizor mecanic și o rezistență electrică există analogie, întrucît ambele disipează o parte din energie sub formă de căldură, dar nu o acumulează. Condensatorul electric este analog cu resortul mecanic, întrucît expresia energiei acumulate de ambele dispozitive are aceeași formă.

Gruparea mai multor elemente într-un model electric, pe baza acestei analogii, este inversată în raport cu modelul mecanic. Două elemente mecanice legate în serie sînt similare cu două elemente electrice legate în derivație (paralel), deoarece tensiunea electrică U este aceeași pentru ambele, în timp ce cantitatea de electricitate Q și intensitatea curentului I se însumează.

Scanned with OKEN Scanner

Analogia $I - \tau$, $U - \gamma$ rezultă din relațiile

$$\begin{array}{ccc} U = R \cdot I & & I = C \cdot \dfrac{dU}{dt} \\ \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow & & \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\ \gamma = \dfrac{1}{G} \cdot \tau & & \tau = \eta \end{array} \tag{3.49}$$

în care t este timpul.

Gruparea elementelor electrice într-un model este similară cu gruparea elementelor mecanice. De exemplu, unui model mecanic format dintr-un resort și un amortizor, legate în paralel, îi va corespunde un model electric format dintr-o rezistență și o capacitate, legate în derivație (paralel).

Analogia $I - \tau$, $U - \dot{\gamma}$ se obține pe baza ecuațiilor

$$\begin{array}{ccc} U = R \cdot I & & I = \dfrac{1}{L} \int U dt \\ \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow & & \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\ \dot{\gamma} = \dfrac{1}{\eta} \tau & & \tau = G \cdot \gamma \end{array} \tag{3.50}$$

în care L este inductanța.

Energiile disipate de amortizor și de rezistență, respectiv energiile acumulate în resort și în bobina de inducție sînt date de expresii similare, ceea ce justifică analogiile (3.50).

Gruparea elementelor după această analogie este identică cu cea a elementelor mecanice, fără inversiune.

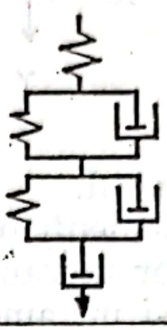
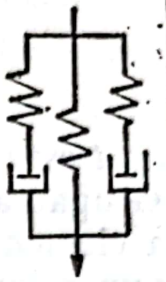
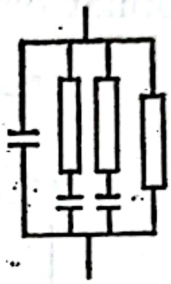
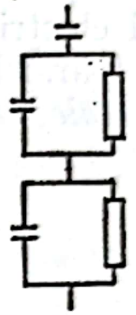
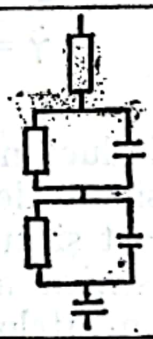
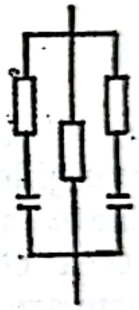
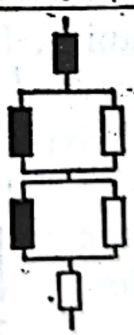
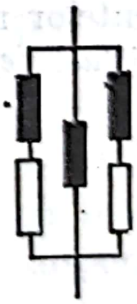
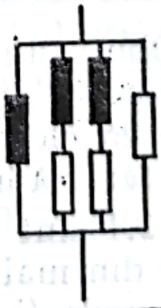
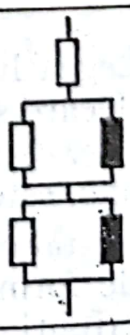
Analogie $U - \tau$, $I - \gamma$ este de forma

$$\begin{array}{ccc} U = R \cdot I & & U = L \dfrac{dI}{dt} \\ \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow & & \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\ \tau = G \cdot \gamma & & \tau = \eta \cdot \dot{\gamma} \end{array} \tag{3.41}$$

Legea lui Ohm este comparabilă cu ecuația solidului Hooke supus la forfecare simplă, pe cînd amortizorul este similar cu o bobină de self-inducție. Gruparea elementelor electrice într-un montaj, după ultima analogie, este inversată în comparație cu gruparea elementelor mecanice.

În tabelul 3.1 sînt sistematizate analogiile electrice și exemple de modele formate din mai multe elemente. Cele mai folosite sînt primele două tipuri, de analogii, prima pentru experiențe la efort constant și a

Scanned with OKEN Scanner

Tipul	Tensiune	Deformație	Modele simple		Modele compuse	
	τ	γ	Resort $\tau = G\gamma$	Amortizor $\tau = \eta\dot{\gamma}$		
$U-\tau$ $Q-\gamma$	U	Q	Condensator $C \to \frac{1}{G}$	Rezistență $R \to \eta$		
$I-\tau$ $U-\gamma$	I	U	Rezistență $R \to \frac{1}{G}$	Condensator $C \to \eta$		
$I-\tau$ $U-\dot{\gamma}$	I	$\int U dt$	Inductanță $L \to \frac{1}{G}$	Rezistență $R \to \frac{1}{\eta}$		
$U-\tau$ $I-\gamma$	U	I	Rezistență $R \to G$	Inductanță $L \to \eta$		

Scanned with OKEN Scanner

doua pentru experiențe la deformație constantă. Analogiile pe bază de inductanță sînt mai puțin utilizate din cauză că oferă mai puține posibilități de modificare a parametrilor [2.]

BIBLIOGRAFIE

1. HAN, C. D., *Rheology in polymer processing*. New York, Academic Press, 1976.
2. PERSOZ, B., *Introduction à l'étude de la rhéologie*, Paris, Dunod, 1960
3. PERSOZ, B., *La rhéologie*, Monographies nr. 3, Paris, Masson et Cie, 1969.
4. TEODORESCU, P. P. și ILLE, V., *Teoria elasticității și introducere în mecanica solidelor deformabile*. Cluj-Napoca, Editura Dacia, 1976.
5. TUDOSE, R. Z., *Procese și utilaje în industria de prelucrare a compușilor macromoleculari*. București, Editura tehnică, 1976.
6. VAICUM, A., *Studiul reologic al corpurilor solide*, București, Editura Academiei R.S.R., 1978.

Scanned with OKEN Scanner

4

FLUIDE VÎSCOASE CU COMPORTARE NENEWTONIANĂ

4.1. INTRODUCERE

Numeroase corpuri fluide prezintă abateri de la comportarea newtoniană. În principal, abaterile se datoresc următoarelor cauze:

— Sistemele bifazice, la care faza dispersă constituie o parte importantă din volum, în timpul curgerii suferă modificări structurale. Din această categorie fac parte suspensiile de polimeri, vopselele, pastele de adezivi, suspensiile de fibre, sîngele, aluatul etc.

— Sistemele omogene macroscopic în care unitățile de curgere (moleculele, agregatele de molecule sau „particulele") sînt anizodimensionale și sub acțiunea forțelor de forfecare suferă orientări. Pot fi date ca exemplu soluțiile și topiturile de polimeri, uleiurile minerale cu vîscozitate mare etc.

La aceste fluide, în condiții izoterme, dependența tensiune — viteză de deformare este neliniară, iar vîscozitatea depinde de parametrii solicitării. Astfel s-a definit vîscozitatea aparentă η_a [v. ec. (1.78)].

Modificarea structurii fluidului, sub acțiunea forțelor de forfecare, constituie factorul principal al abaterilor de la comportarea newtoniană. Viteza cu care se modifică structura, în sensul structurării sau destructurării, poate fi mai mare sau mai mică. Din această cauză, unele corpuri își modifică vîscozitatea în timp, deși parametrii solicitării rămîn constanți. Cînd viteza proceselor de modificare a structurii este suficient de mică pentru a puta fi sesizată experimental, se zice că *fluidul este dependent de timp*. La aceste fluide vîscozitatea depinde de mărimea, durata și istoria forfecării.

Fluidele a căror vîscozitate, în condiții izoterme și izobare, variază funcție de parametrii solicitării și de timp, sau numai funcție de para-

metrii solicitării se numesc *fluide nenewtoniene* [2,12]*. Ostwald le-a denumit *fluide cu viscozitate de structură* [1], iar Reiner [20] le atribuie termenul de fluide nenewtoniene.

Fluidele nenewtoniene pot avea numai o componentă vîscoasă, ca în cazul soluțiilor de carbopol de concentrație mică sau, în cele mai multe cazuri, au și o componentă elastică. Majoritatea soluțiilor și topiturilor de polimeri au comportare viscoelastică.

În acest capitol se discută fluidele vîscoase nenewtoniene, făcîndu-se abstracție de componenta elastică.

Fluidele vîscoase nenewtoniene se împart în două grupe:

— Fluide independente de timp, caracterizate prin aceea că viteza de forfecare într-un punct dat este dependentă exclusiv de tensiunea de forfecare în acel punct.

— Fluidele dependente de timp sînt acelea la care viteza de forfecare este o funcție de mărimea și durata efortului tangențial și de istoria forfecării [21].

4.2. FLUIDE NENEWTONIENE INDEPENDENTE DE TIMP

Aceste corpuri sînt denumite în mod curent *fluide vîscoase nenewtoniene* sau *fluide pur vîscoase* [17, 21].

Ele sînt clasificate de unii autori [21] în fluide cu prag de tensiune și fluide fără prag de tensiune. Cele cu prag de tensiune vor fi prezentate în capitolul 6, referitor la corpurile vîscoplastice.

În categoria fluidelor fără prag de tensiune, dacă se face abstracție de componenta elastică, sînt incluse majoritatea lichidelor nenewtoniene. Funcție de dependența tensiune — viteză de forfecare, conform fig. 4.1, se clasifică în fluide pseudoplastice, curbele *2* și fluide dilatante, curbele *3*. Fluidul lui Newton este reprezentat prin dreptele *1*.

Comportarea pseudoplastică și dilatantă este reprezentată prin două linii ce pleacă din origine și au curburile inversate, (fig. 4.1, *a*). Prin logaritmarea ecuației (1.67) se obține:

$$\lg \tau_{yx} = \lg \dot{\gamma}_{yx} + \lg \eta_a \qquad (4.1)$$

aparent ecuația unei drepte a cărei pantă este egală cu unu, ceea ce este valabil pentru fluide newtoniene a căror vîscozitate este constantă și independentă de parametrii solicitării. Pentru fluide nenewtoniene

* În [2] termenul nenewtonian este atribuit fluidelor care nu respectă ecuația constitutivă a fluidelor newtoniene.

Scanned with OKEN Scanner

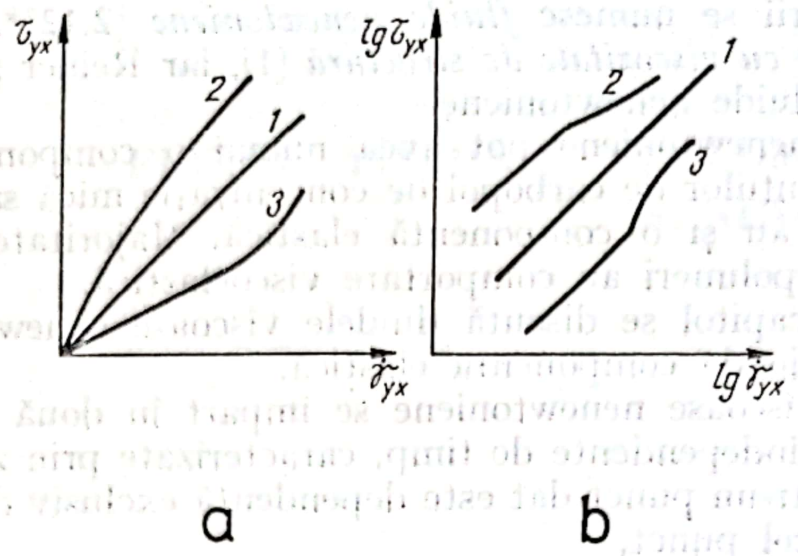


Fig. 4.1. Reogramele fluidelor nenewtoniene independente de timp.

viscozitatea aparentă η_a este funcție de viteza de forfecare. Curbele *2* și *3* au, începînd din origine, o porțiune liniară cu panta egală cu unu, ceea ce denotă o comportare newtoniană, urmată de un domeniu neliniar, prin care se diferențiază comportarea dilatantă de cea pseudoplastică. Funcție de sensul de variație a pantei tangentei la aceste curbe se deosebesc:

— comportarea nenewtoniană:
  — pseudoplastică, pentru $0 <$ pantă < 1, și
  — dilatantă, pentru panta > 1;
— comportare newtoniană, pentru panta egală cu unu.

Măsura comportării nenewtoniene este dată de abaterea pantei de la unitate. Deoarece panta curbelor de curgere, în coordonate logaritmice, constituie un criteriu cantitativ al tipului de comportare reologică, a fost denumit *indice de curgere* și este considerat o proprietate fizică a corpului.

Sensul de variație a viscozității aparente la fluidele nenewtoniene depinde de comportarea reologică. Corpurile pseudoplastice prezintă fenomenul de fluidificare; viscozitatea este o funcție descrescătoare de viteza de forfecare. Viscozitatea corpurilor dilatante crește o dată cu creșterea vitezei de forfecare; manifestă tendință de îngroșare (fig. 4.2). Mecanismul răspunzător de comportarea reologică a celor două fluide este diferit.

4.2.1. FLUIDE PSEUDOPLASTE

Corpurile pseudoplaste posedă viscozitate dependentă de structură. Funcție de valoarea parametrilor solicitării, structura suferă modificări reversibile, ceea ce se pune în evidență pe cale experimentală; prin modi-

Scanned with OKEN Scanner

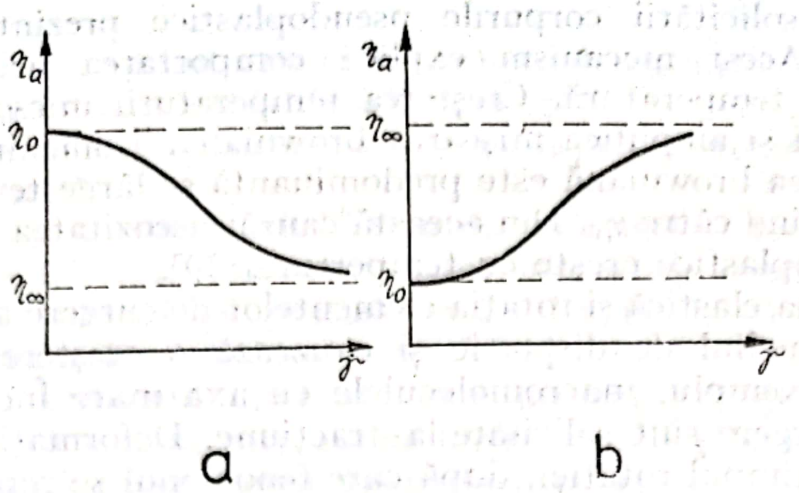


Fig. 4.2. Dependența vîscozității de viteza de forfecare:
a — fluide pseudoplastice; *b* — fluide dilatante.

ficarea vîscozității fluidului. Comportarea pseudoplastă, specifică soluțiilor de polimeri, adezivilor, fluidelor biologice, soluțiilor de acetat de celuloză etc., se caracterizează prin vîscozitate descrescătoare cu viteza de forfecare. În domeniile extreme ale parametrilor solicitării comportarea este newtoniană.

Aceste corpuri, eterogene sau omogene macroscopic, sînt formate dintr-un mediu în care sînt dispersate elementele formate din macromolecule, agregate de molecule sau particule. Comportarea neliniară se datorește modificărilor în structura corpului, ceea ce determină interacțiuni între elementele de curgere și mediul de dispersie, descrescătoare cu viteza de forfecare.

Reiner [20] consideră că există două tipuri de interacțiuni: *perturbații și imobilizări.*

Perturbațiile, pentru elemente elastice și anizodimensionale, sînt generate prin patru mecanisme diferite.

Mișcarea browniană și forțele de forfecare acționează diferit asupra elementelor de curgere. Mișcarea browniană cauzează dezordine, pe cînd forța de forfecare produce orientare. Raportul între forțele ce generează dezordine și cele ce generează orientare se modifică o dată cu creșterea vitezei de forfecare și cu creșterea temperaturii. La viteze de forfecare mici, predomină mișcarea browniană, elementele au poziții întîmplătoare în raport cu direcția de curgere și vîscozitatea are o valoare constantă η_0 (v. fig. 4.2,*a*). Pe măsură ce forța de forfecare crește și treptat devine predominantă, elementele se orientează treptat cu axa mare paralelă cu direcția de curgere. Interacțiunea între elemente și mediul de imersie se diminuează și vîscozitatea scade $\eta_a < \eta_0$. La viteze de forfecare mari, orientarea este completă, vîscozitatea ajunge la valoarea minimă η_∞ și în continuare rămîne constantă. Se observă că la valori extreme ale

Scanned with OKEN Scanner

parametrilor solicitării corpurile pseudoplastice prezintă comportare newtoniană. Acest mecanism explică comportarea neliniară și este dependent de temperatură. Creșterea temperaturii micșorează viscozitatea mediului și amplifică mișcarea browniană. Domeniul de solicitări în care mișcarea browniană este predominantă se lărgește și viscozitatea η_a crește, tinzînd către η_0. Din această cauză viscozitatea relativă a unei soluții pseudoplastice crește cu tempertura [20].

Deformația elastică și rotația elementelor de curgere amplifică interacțiunea cu mediul de dispersie și cauzează o creștere a vîscozității relative. De exemplu, macromoleculele cu axa mare înclinată față de direcția de curgere sînt solicitate la tracțiune. Deformația elastică este recuperată în timpul rotației, după care fenomenul se repetă. Oscilațiile elementelor de curgere, caracterizate prin alungiri elastice și recuperări, sînt transmise fazei de imersie și cantitatea de energie disipată crește, ceea ce echivalează cu o creștere a vîscozității.

Elementele de curgere sub formă de filamente elastice, sub acțiunea forțelor de forfecare, sînt îndreptate, ceea ce micșorează interacțiunea cu faza lichidă și scade vîscozitatea. Prin rotație ele tind să revină la forma inițială. Acest proces este independent de temperatură.

Un alt tip de perturbație este caracterizat de distrucția mecanochimică. Elementele elastice de curgere, dispuse în poziția corespunzătoare solicitării maxime, sau elementele rigide prin încovoiere se rup. Prin micșorarea lungimii ele tind către o formă izodimensională și vîscozitatea scade. Reograma obținută în sensul crescător și descrescător al vitezei de forfecare va prezenta histerezis [20]. Fragmentele rezultate prin distrucție parțial se pot recombina.

Imobilizările se datoresc adsorbției sau reținerii interne a fazei lichide de către elementele de curgere. Lichidul poate fi reținut de către forțele de suprafață. Grosimea stratului adsorbit se micșorează sub acțiunea forțelor de forfecare. Procesul de adsorbție fiind exoterm, creșterea temperaturii micșorează cantitatea de lichid adsorbită.

Elementele de curgere sînt formate din macromolecule, micelii, grupuri de micelii sau agregate de molecule. Aceste asociații se formează sub acțiunea diferitelor tipuri de legături dintre atomi și molecule. Ele includ în masa lor o parte din faza continuă. Sub acțiunea solicitărilor, elementele fie că sînt deformate, fie că se rup, în ambele cazuri eliminînd o parte din faza continuă. Prin expulzarea lichidului și prin rupere, dimensiunile se micșorează, crește volumul fazei lichide libere, iar vîscozitatea scade.

Toate tipurile de interacțiuni dintre elementele de curgere și faza de imersie evidențiază mecanismul descreșterii vîscozității la creșterea parametrilor solicitării.

Scanned with OKEN Scanner

Suspensiile de concentrație mare, sub acțiunea forțelor de forfecare, devin rigide, ca urmare a modificării porozității, respectiv a volumului. Această proprietate de *expansiune a volumului prin forfecare* O. Reynolds a numit-o dilatanță [20].

Freundlich și colaboratorii [7,8] utilizează același termen pentru a defini proprietatea unor corpuri a căror *vîscozitate crește cu viteza de forfecare*. Ei se bazează pe precizările lui Reynolds că fenomenul de expansiune a corpurilor este însoțit de o rigidizare.

În general, termenul dilatanță este utilizat atît pentru a defini dilatarea volumică a unui corp supus forfecării, cît și comportarea reologică caracterizată de creșterea vîscozității cu creșterea vitezei de forfecare. Ambele efecte se pot manifesta la același sistem, simultan sau succesiv. Pentru a se evita confuziile, corpurile pseudoplaste și dilatante au fost numite corpuri cu *fluidificare* și respectiv cu *îngroșare* prin forfecare. În mod curent *corpurile care în condiții izoterme, sub acțiunea forfecării, manifestă fenomenul de îngroșare independent de timp se numesc dilatante*. O definiție acceptată a termenului de dilatanță este următoarea: „Dilatanța este creșterea izotermă, reversibilă, a vîscozității cu o dependență de timp nemăsurabilă. Procesul poate sau nu poate fi însoțit de o modificare sesizabilă a volumului" [1].

Reograma corpurilor cu comportare dilatantă este prezentată în figura 4.1, curbele *3*. Comportarea este neliniară. Vîscozitatea crește cu viteza de forfecare (fig. 4.2, *b*). Aceste corpuri fluide manifestă fenomenul de îngroșare.

Comportarea dilatantă apare cel mai frecvent la suspensiile de concentrație mare, ca cele de cuarț, pastele de amidon, mortar, etc. dar nu exclude unele soluții concentrate și topituri de polimeri sau emulsii. Explicarea mecanismului pe baza împachetării sau expansiunii particulelor este insuficient, întrucît fenomenul este complex.

Freundlich și Jones [7], studiind suspensii de cuarț și amidon, ajung la concluzia că suspensiile se comportă dilatant atunci cînd particulele sînt independente una de alta. Aglomerarea particulelor diminuează dilatanța. Aceasta conduce la concluzia că adaosul de electroliți produce coagularea particulelor și reduce dilatanța.

Pryce-Jones [18, 19] constată că un sistem complet dispers se comportă newtonian, la agregarea parțială a particulelor devine dilatant, iar la o agregare foarte avansată se comportă tixotrop.

Unul din factorii importanți pentru comportarea dilatantă este potențialul zeta. Dilatanța se manifestă la valori mari ale potențialului zeta. Influența electroliților asupra suspensiilor se manifestă prin efectul asupra potențialului zeta a particulelor și asupra stratului de solvatare.

Scanned with OKEN Scanner

În același timp nu toate suspensiile cu potențial zeta mare au comportare dilatantă [1].

Freundlich și Roder [1] consideră dilatanța o proprietate a suspensiilor care formează sub acțiunea forfecării asociații sau pachete închise de granule, care sînt mobile în faza lichidă (fig. 4.3). Lichidul din interiorul asociațiilor udă toate particulele. Prin distrugerea acestei structuri iau naștere noi spații deschise formate din granule, în care lichidul este aspirat și din cauza deshidratărilor locale și a frecărilor directe dintre particule, întregul sistem se „rigidizează". După îndepărtarea solicitărilor, suspensia revine la starea inițială cu o distribuție independentă a granulelor.

Comportarea dilatantă apare la suspensii formate din granule sferice și de alte forme [7,8]. De asemenea, fenomenul nu este limitat de dimensiunea granulelor. S-a constatat prezența dilatanței la granule cuprinse între 1 μm și 700 μm [1, 6, 8].

Dilatanța apare la suspensiile de concentrație mare îmtr-un domeniu relativ restrîns, cuprins între 40% și 50% volume [5, 23], dar literatura citează frecvente cazuri de comportare dilatantă și la concentrații mici de 10—30% [1]. Numeroși cercetători au constatat prezența dilatantei la o serie de soluții, ca de exemplu 5% nitroceluloză în acetonă, 30% rășină vinilică în ciclohexan sau 0,02% sare de cupru în acid cetil-fenil-eter-sulfonic [1]. Comportarea dilatantă a soluțiilor este atribuită agregării macromoleculelor sub formă de rețea.

Metzner și Whitlock [16] au studiat corelația între dilatanta volumică și dilatanta reologică, caracterizată de creșterea vîscozității cu viteza de forfecare. Ei au constatat că fenomenele sînt independente unul de altul.

Atunci cînd ambele apar la același sistem, dilatanța volumică în raport cu dilatanța reologică apare la viteze de forfecare mai mici. Dilatanța volumică o explică pe baza împachetării și deslocurii particulelor, conform mecanismului propus de Reynolds. Dilatanța reologică

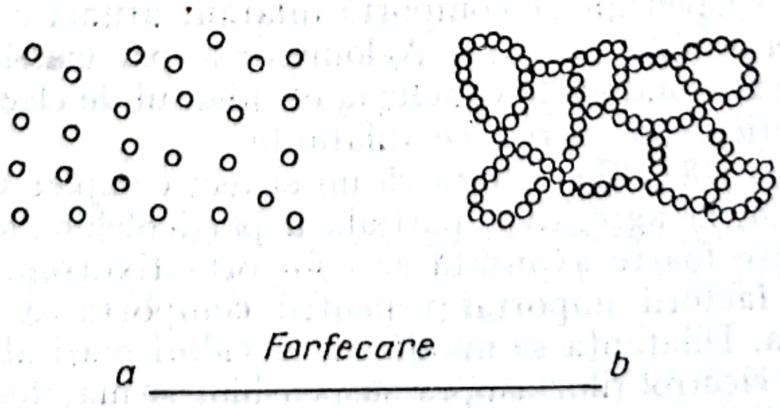


Fig. 4.3. Mecanismul comportării dilatante.

este cauzată de transferul de impuls între straturile adiacente de fluid în curgere. O particulă ce se deplasează dintr-un strat în stratul adiacent, modifică viteza tuturor particulelor din stratul în care s-a transferat. O dată cu creșterea vitezei de forfecare alinierea particulelor avansează și un număr mai mare de particule vor participa la transferul de impuls, atunci cînd o singură particulă se deplasează din stratul adiacent. Acest mecanism sugerează că dilatanța ar trebui să apară la descreșterea vitezei de forfecare și cu creșterea concentrației fazei solide.

Bauer și Collins [1] consideră că există două mecanisme ale dilatanței, unul asociat cu expansiunea volumului, iar al doilea cu formarea unei rețele. În timpul curgerii, forțele de forfecare acționează în moduri diferite; pot forma structuri prin aliniere și asociere sau pot rupe legăturile intermoleculare care nu sînt suficient de puternice. Vîscozitatea sistemului va crește sau respectiv se va diminua, funcție de sensul în care acționează forfecarea. În suspensiile concentrate curgerea impune dislocarea particulelor și expansiunea volumului. Fenomenul de expansiune nu apare la suspensiile diluate. Efectul forfecării se manifestă prin formarea unor agregate. Creșterea unităților de curgere, prin formarea agrepatelor, determină o ușoară expansiune a volumului înaintea creșterii vîscozității.

Dilatanța volumică și reologică apare și în soluțiile de polimeri. În soluțiile diluate de 2—4%, supuse forfecării, frecvența ciocnirilor între grupurile formate din molecule de polimer, crește și favorizează formarea unor rețele locale sub formă de gel. Volumul de fază lichidă fiind suficient de mare, creșterea volumului de gel determină numai o creștere a vîscozității fără să afecteze volumul sistemului. La concentrații mari, cînd volumul gelului devine egal cu cel al lichidului, comportarea dilatantă se manifestă atît prin creșterea volumului, cît și a vîscozității [4].

4.2.3. ECUAȚII REOLOGICE

Numeroase corpuri fluide prezintă abateri de la comportarea newtoniană. Cele mai multe posedă, pe lîngă componenta vîscoasă, și o componentă elastică sau plastică. Cercetările teoretice și experimentale au urmărit stabilirea unor ecuații ce corelează componentele tensiunii cu componentele deformației sau (și) a vitezei de deformare și proprietățile corpurilor. Ecuațiile reologice sau constitutive astfel obținute servesc la abordarea teoretică a problemelor de curgere.

Coleman și Noll [10] au arătat că în cazul fluidelor vîscoelastice omogene și incompresibile, supuse la forfecare simplă în regim staționar,

Scanned with OKEN Scanner

componentele tensorului tensiunilor poate fi exprimat prin trei funcții independente

$$\tau_{xy} = -\eta(\dot{\gamma})\dot{\gamma}_{xy}$$
$$\tau_{xx} - \tau_{yy} = -\psi_1(\dot{\gamma})\dot{\gamma}_{xy}^2 \qquad (4.2)$$
$$\tau_{yy} - \tau_{zz} = -\psi_2(\dot{\gamma})\dot{\gamma}_{xy}^2$$

în care $\eta(\dot{\gamma})$ este vîscozitatea aparentă dependentă de parametrii solicitării, $\psi_1(\dot{\gamma})$ *prima funcție a solicitărilor normale* și $\psi_2(\dot{\gamma})$ *a doua funcție a solicitărilor normale*. Funcțiile ψ_1 și ψ_2 descriu elasticitatea fluidului.

Fluidele nenewtoniene care posedă numai viscozitate sau cele viscoelastice, a căror componentă elastică este neglijabilă, vor avea prima și a doua diferență a tensiunilor normale egală cu zero, iar comportarea reologică este descrisă de o singură funcție de tipul (4.2). În cele ce urmează se vor discuta ecuațiile reologice ale fluidelor nenewtoniene care posedă numai componenta vîscoasă.

4.2.3.1. Legea puterii

Cel mai simplu model reologic propus de Ostwald — de Waele are următoarea formă

$$\tau = k\dot{\gamma}^n \qquad (4.3)$$

în care k este indicele de consistență, iar n indicele de curgere, ambii considerați constanți. Într-o reprezentare logaritmică ecuația reprezintă o dreaptă. Pentru foarte multe fluide dependența logaritmică $\tau - \dot{\gamma}$ pe un domeniu larg de variație a parametrilor solicitării, este reprezentată printr-o curbă. Din această cauză, legea puterii este aplicabilă pe domenii limitate de variație a vitezei de forfecare, în care curba se poate asimila cu o dreaptă.

Marele avantaj al modelului Ostwald — de Waele este simplitatea algebrică și numărul mic de constante de material. Acestea îl fac aplicabil în tratarea teoretică a numeroase probleme de inginerie. În tabelul 4.1 sînt dați parametrii modelului pentru cîteva materiale.

Tabelul 4.1

Parametrii modelului Ostwald-de Waele pentru cîteva materiale, la temperatura camerei

Compoziția materialului % masice	k, $N \cdot s^n/m^2$	n, adimensional.
0,67% CMC în apă	0,113	0,716
1,50% CMC în apă	1,17	0,554
3,00% CMC în apă	3,47	0,566
33% var în apă	2,68	0,171
4% celuloză în apă	7,48	0,575

Scanned with OKEN Scanner

Funcție de valoarea indicelui de curgere n, ecuația (4.2) poate reproduce comportarea reologică a trei corpuri diferite. Aceasta se poate pune în evidență prin sensul de variație a vîscozității cu viteza de forfecare. Se elimină tensiunea de forfecare, prin combinarea ecuațiilor (1.78) și (4.3) și se obține dependența vîscozității aparente de viteza de forfecare, respectiv o altă formă a legii puterii. Din ultima ecuație rezultă

$$\eta_a = k\dot{\gamma}^{n-1} \tag{4.4}$$

— pentru $n = 1$, $\eta_a = k$ — constant; comportare newtoniană;
— pentru $n < 1$, η_a scade cu creșterea lui $\dot{\gamma}$; comportare pseudoplastică, și
— pentru $n > 1$, η_a crește cu creșterea lui $\dot{\gamma}$; comportare dilatantă

Se consideră o stare de referință τ° și $\dot{\gamma}^\circ$ căreia îi corespunde o vîscozitate η_0. Raportul între vîscozitatea aparentă η_a și vîscozitatea corespunzătoare stării de referință, conform ecuației (4.3) va avea forma

$$\eta_a = \eta^\circ \left(\frac{\dot{\gamma}}{\dot{\gamma}^\circ}\right)^{n-1} \tag{4.5}$$

sau, prin intermediul ecuației (4.3), funcție de tensiunile tangențiale

$$\eta_a = \eta^\circ \left(\frac{\tau}{\tau^\circ}\right)^{(n-1)/n} \tag{4.6}$$

În ecuațiile (4.5) și (4.6) η° poate fi determinat pentru $\dot{\gamma}^\circ = 1$, respectiv $\tau^\circ = 1$, și ambele ecuații iau forme mai simple. Indicele de curgere n pentru foarte multe corpuri fiind subunitar, legea puterii [v. ec. (4.4) și [4.5)] sugerează o vîscozitate infinită, cînd viteza de forfecare tinde către zero. Acest inconvenient limitează utilizarea ei.

Legea puterii în formă generalizată se poate scrie

$$\eta_a = \eta^\circ \left[\frac{1}{2} I_{\dot{\gamma}2}\right]^{(n-1)/2} \tag{4.7}$$

în care $I_{\dot{\gamma}2}$ este al doilea invariant al tensorului vitezei de deformare. Forma acestuia este similară cu a celui de al doilea invariant al tensorului tensiunilor [v. ec. (1.28)] sau al tensorului deformațiilor [v. ec. (1.45)] Expresia lui $I_{\dot{\gamma}2}$ în sistemele de coordonate uzuale este dată în tabelul 4.2.

Legea puterii generalizată poate fi aplicată corpurilor supuse la solicitări multiple. Pentru materiale solicitate la forfecare simplă de

Scanned with OKEN Scanner

Tabelul 4.2

Expresia invariantului tensorului vitezelor de forfecare [11]

Coordonate	Expresia
Rectangulare x, y, z	$\frac{1}{2} I_{\dot{\gamma}_2} = 2\left[\left(\frac{\partial v_x}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v_y}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial v_z}{\partial z}\right)^2\right] + \left[\frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y}\right]^2 + \left[\frac{\partial v_z}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial z}\right]^2 + \left[\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x}\right]^2$
Cilindrice r, θ, z	$\frac{1}{2} I_{\dot{\gamma}_2} = 2\left[\left(\frac{\partial v_r}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r}{r}\right)^2 + \left(\frac{\partial v_z}{\partial z}\right)^2\right] + \left[r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{v_\theta}{r}\right) + \frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \theta}\right]^2 + \left[\frac{1}{r}\frac{\partial v_z}{\partial \theta} + \frac{\partial v_\theta}{\partial z}\right]^2 + \left[\frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial r}\right]^2$
Sferice $r, \theta, \varnothing$	$\frac{1}{2} I_{\dot{\gamma}_2} = 2\left[\left(\frac{\partial v_r}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r}{r}\right)^2 + \left(\frac{1}{r \sin\theta}\frac{\partial v\Phi}{\partial \Phi} + \frac{v_r}{r} + \frac{v_\theta \operatorname{ctg}\theta}{r}\right)^2\right] + \left[r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{v_\theta}{r}\right) + \frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \theta}\right]^2 + \left[\frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial}{\partial \Phi}\left(\frac{v_\varnothing}{\sin\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial v_\theta}{\partial \Phi}\right)\right]^2 + \left[\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial v_r}{\partial \Phi} + r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{v\Phi}{r}\right)\right]^2$

tensiunea τ_{yx}, majoritatea derivatelor din expresia invariantului se anulează și se obține

$$\frac{1}{2} I_{\dot{\gamma}_2} = \left(\frac{\partial v_x}{\partial y}\right)^2 = \dot{\gamma}_{yx}^2 \tag{4.8}$$

iar legea generalizată se reduce la ecuația (4.5) în care η° corespunde valorii $\dot{\gamma}^\circ = 1$.

4.2.3.2. Modelul Prandtl-Eyring

Ecuația reologică a fost obținută pe baza teoriei cinetice a lichidelor elaborată de Eyring. Pentru forfecarea simplă modelul are forma [20]

$$\tau = k_1 \operatorname{arcsh}\ (\dot{\gamma}/k_2) \tag{4.9}$$

în care k_1 și k_2 sînt doi coeficienți de material.

Scanned with OKEN Scanner

Modelul are avantajul că poate reproduce comportarea unor lichide nenewtoniene cu ajutorul a două constante de material. Forma algebrică complicată îi limitează, însă, utilizarea în rezolvarea problemelor de curgere.

Modelul Prandtl-Eyring pentru solicitări tridimensionale, exprimat în termeni de vîscozitate [17]

$$\eta_a = \frac{\eta_0 \operatorname{arcsh}\left[k\left(\frac{1}{2} I_{\dot{\gamma}2}\right)^{1/2}\right]}{k\left(\frac{1}{2} I_{\dot{\gamma}2}\right)^{1/2}} \tag{4.10}$$

conține tot două constante de material, din care η_0 este vîscozitatea la viteza de forfecare egală cu zero [v. fig. (4.2) și $I_{\dot{\gamma}2}$ al doilea invariant al tensorului vitezelor de forfecare.

O generalizare a ecuației (4.10) se obține prin exprimarea vîscozității sub forma unei serii infinite [17]

$$\eta_a = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\eta_{0i} \operatorname{arcsh}\left[k_i\left(\frac{1}{2} I_{\dot{\gamma}2}\right)^{1/2}\right]}{k_i\left(\frac{1}{2} I_{\dot{\gamma}2}\right)^{1/2}} \tag{4.11}$$

Modelul conține o infinitate de coeficienți de material (fiecare termen are doi coeficienți). Utilizarea lui în calcule este dificilă, chiar atunci cînd se iau în considerație un număr limitat de termeni ai seriei.

Prin explicitarea ecuației (4.9) funcție de $\dot{\gamma}$ și prin dezvoltarea în serie a funcției hiperbolice și reținerea primilor doi termeni, se ajunge la modelul Steiger — Ory — Rabinowitsch

$$\dot{\gamma} = k_3\tau + k_4\tau^3 \tag{4.12}$$

în care apar doi coeficienți de material k_3 și k_4.

4.2.3.3. Modelul Powell-Eyring

Numeroase fluide, între care soluțiile și topiturile de polimeri, la viteze de forfecare foarte mici și foarte mari se comportă nenewtonian. Vîscozitatea aparentă prezintă două valori limită: η_0 la viteză de forfecare egală cu zero și η_∞ la viteză de forfecare foarte mare (v. fig. 4.2). Aceste vîscozități sînt coeficienți de material și corespund domeniilor de comportare newtoniană.

Scanned with OKEN Scanner

Din modelele anterioare nu rezultă o valoare limită pentru vîscozitate. Pe această bază s-au propus modele empirice care iau în considerație o astfel de comportare.

Modelul Powell-Eyring cu trei parametri este de forma [21]

$$\tau = k_1\dot{\gamma} + k_2 \operatorname{arcsh}(k_3\dot{\gamma}) \tag{4.13}$$

în care k_1, k_2 și k_3 sînt coeficienți de material.
Pentru valori extreme ale parametrilor solicitării, modelul se simplifică.

La viteze mici de forfecare $\operatorname{arcsh}(k_3\dot{\gamma}) \simeq k_3\dot{\gamma}$ și modelul devine

$$\tau = (k_1 + k_2.k_3)\dot{\gamma} \tag{4.14}$$

ceea ce demonstrează o comportare newtoniană, întrucît suma termenilor din paranteză este constantă și egală cu vîscozitatea la viteze mici de forfecare $\eta_0 = k_1 + k_2k_3$.

La viteze mari de forfecare $k_1\dot{\gamma} \gg k_2 \operatorname{arcsh}(k_3\dot{\gamma})$ și ecuația (4.13) se reduce la

$$\tau = k_1\dot{\gamma} \tag{4.15}$$

Din nou o comportare newtoniană pentru care $k_1 = \eta_\infty$.
Comparînd valorile limită ale vîscozității, conform ecuațiilor (4.14) și (4.15), rezultă $\eta_0 > \eta_\infty$, relație de ordine specifică fluidelor pseudoplastice.

Vîscozitatea aparentă a corpurilor pseudoplastice, conform modelului Powell-Eyring, poate fi exprimată funcție de cel de al doilea invariant $I_{\dot{\gamma}2}$ al tensorului vitezelor de forfecare și de vîscozitățile limită η_0 și η_∞ [17]

$$\eta_a = \eta_\infty + (\eta_0 - \eta_\infty)\frac{\operatorname{arcsh} k\left(\frac{1}{2}I_{\dot{\gamma}2}\right)^{1/2}}{k\left(\frac{1}{2}I_{\dot{\gamma}2}\right)^{1/2}} \tag{4.16}$$

Utilizarea ei în calculele inginerești este limitată de forma algebrică complicată.

4.2.3.4. Modelul Ellis

Modelul Ellis conține trei coeficienți de material și are forma [21]:

$$\tau = \frac{\dot{\gamma}}{k_1 + k_2\tau^{n-1}} \tag{4.17}$$

Acest model este extrem de flexibil, putînd fi utilizat pentru un număr mare de corpuri. Este puțin mai complicat decît legea puterii dar poate

Scanned with OKEN Scanner

fi aplicat pe un domeniu mai larg de variație a vitezei de forfecare. De asemenea, la valori mici ale lui $\dot{\gamma}$, valoarea vîscozității nu tinde către infinit. Modelul sugerează o comportare newtoniană pentru $n > 1$ și tensiuni de forfecare mici, sau pentru $n < 1$ și tensiuni de forfecare mari. De asemenea, el se reduce la legea lui Newton pentru $k_2 = 0$ sau la legea puterii pentru $k_1 = 0$. În tabelul 4.3 sînt dați coeficienții de material din modelul Ellis pentru soluții de carboximetilceluloză (CMC) în apă, la temperatura de 30°C.

Tabelul 4.3

Parametrii modelului Ellis pentru soluții de CMC în apă la $T = 30°C$

Concentrația masică, %	Masa molară CMC	n adimensional	k_1, $m^2/N \cdot s$	k_2, $m^2/N \cdot s$	Tensiunea de forfecare · N/m^2
4,0	mică	1,170	1,377	3,211	0,8—44
5,0	mică	1,337	0,000	0,521	0,8—101
1,5	medie	1,185	4,210	2,724	0,6—30
2,5	medie	1,412	0,383	0,181	1,7—72
0,6	mare	1,707	2,891	0,280	0,8—27

Modelul Ellis se poate scrie și în forma [17]

$$\eta_a = \frac{\eta^\circ}{1 + (\tau/\tau_{1/2})^{\frac{1-n}{n}}} \tag{4.18}$$

în care η° este vîscozitatea la viteză de forfecare egală cu zero, iar $\tau_{1/2}$ este tensiunea la care vîscozitatea aparentă scade la jumătate.

4.2.3.5. Modelul Reiner-Philippoff

Modelul ține cont de comportarea newtoniană la valori extreme ale vitezei de forfecare. După cum rezultă, conține trei coeficienți de material

$$\tau = \left[\eta_\infty + \frac{\eta_0 - \eta_\infty}{1 + (\tau/k)^2}\right]\dot{\gamma} \tag{4.19}$$

Vîscozitatea aparentă va fi dată de

$$\eta_a = \eta_\infty + \frac{\eta_0 - \eta_\infty}{1 + (\tau/k)^2} \tag{4.20}$$

Scanned with OKEN Scanner

La valori extreme ale solicitării, ultima ecuație se simplifică

$$\tau \to 0 \qquad \eta_a = \eta_0$$

$$\tau \to \infty \qquad \eta_a = \eta_\infty$$

demonstrînd comportarea newtoniană. Între valorile extreme ale vîscozității, curba $\tau - \dot{\gamma}$, conform ecuației (4.17), prezintă un punct de inflexiune de ordonată $\tau = k\sqrt{3\eta_0\eta_\infty}$.

Modelele prezentate au în general un caracter empiric sau semiempiric, din această cauză este riscantă extrapolarea lor în afara domeniului investigat. Coeficienții de material conținuți de modele depind de temperatură, presiune, compoziție și chiar de valorile parametrilor solicitării. Dependența $\tau - \dot{\gamma}$ pentru majoritatea modelelor discutate este reprezentată în fig. 4.4.

4.2.3.6. Alte modele

În ultimele decenii s-au elaborat un număr mare de modele reologice, ca urmare a progreselor făcute în dezvoltarea curgerii fluidelor nenewtoniene. Majoritatea modelelor sînt aplicabile la curgerea cu forfecare simplă.

Ecuațiile reologice corelează tensiunea tangențială cu viteza de forfecare și parametrii de material. Cele mai multe sînt explicitate în

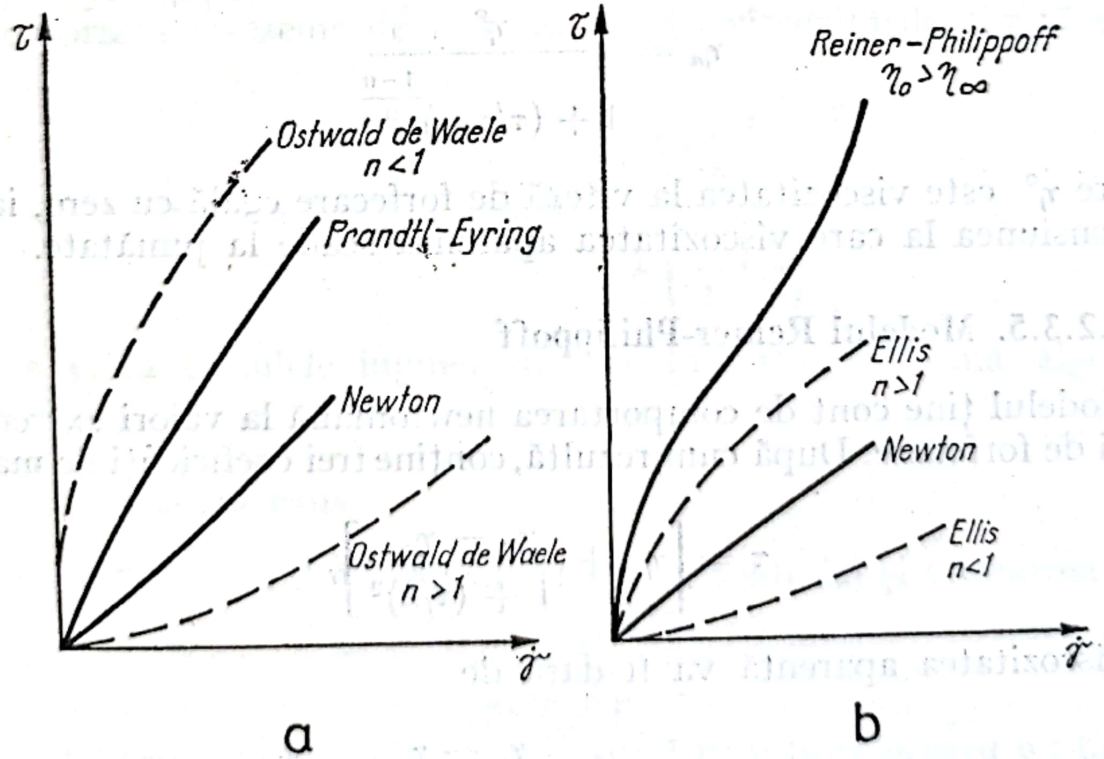


Fig. 4.4. Reprezentarea modelelor reologice:
a — cu doi coeficienți de material; *b* — cu trei coeficienți de material.

Scanned with OKEN Scanner

tensiuni sau vîscozități aparente. La curgerea unui fluid nenewtonian, independent de timp prin tuburi circulare, dacă nu există alunecare la perete, tensiunea de forfecare la perete se exprimă funcție de raportul între viteza medie de curgere și diametrul tubului $8\,v/d$. Aceste modele sînt comode în calculele inginerești. Cu ajutorul lor s-a definit un număr Reynolds generalizat, valabil pentru lichidele nenewtoniene ce respectă legea puterii, s-au obținut ecuații pentru calculul consumului de energie în amestecare, a coeficientului de frecare la curgere, etc. [12, 21, 22].

Cîteva modele reologice pentru fluide pseudoplastice sînt trecute în tabelul 4.4. Utilizarea cea mai largă o are modelul Ostwald- de Waele. Raportul $8\,v/d$ este o funcție unică de tensiunea de forfecare la perete τ_p, și pe această bază s-a scris ecuația (4.21) (tabelul 4.4). Coeficienții de material k' și n' nu sînt constanți; ei depind de raportul $8\,v/d$. Dintr-o reprezentare logaritmică a ecuației (4.19), panta tangentei într-un punct al curbei reprezintă n', iar ordonata pentru $(8v/d) = 1$, va da valoarea lui k'. Variația concentrației și a temperaturii unui corp modifică valoarea lui k', pe cînd n' rămîne aproximativ constant.

Tabelul 4.4

Modele reologice exprimate funcție de raportul $8\,v/d$

Nr. crt.	Denumirea modelului	Expresia modelului	Constanta de material	
1.	Ostwald-de Waele	$\tau_p = k' \left(\frac{8v}{d}\right)^{n'}$	k', n'	4.21
2.	Simonds ș.a.	$\tau_p = k \left(\frac{8v}{d}\right)^{1-n}$	$k,\ n$	4.22
3.	Spencer-Dillon	$\tau_p = \frac{8v/d}{k_1\left[1 + k_2\tau_p + \frac{(k_2\tau_p)^2}{2!} + \frac{(k_2\tau_p)^3}{3!} + \frac{(k_2\tau_p)^4}{4!}\right]}$	$k_1,\ k_2$	4.23
4.	Williamson	$\tau_p = \frac{k_1(8v/\mathrm{d})}{k_2 + (8v/\mathrm{d})} + k_3\frac{(8v)}{d}$	$k_1,\ k_2,\ k_3$	4.24
5.	Reiner-Rivlin	$\tau_p = [(\eta_0 - \eta_\infty) - \tau_p F/4\eta_0 + \eta_\infty]\frac{8v}{d}$	$\eta_0,\ \eta_\infty, F$	4.25

Scanned with OKEN Scanner

Între coeficienții de material din legea puterii, n și k, [v. ec. (4.3)] și n' și k' [v. ec. (4.21)] există următoarele corelații [21]:

$$n = n' \frac{1}{1 - \frac{1}{3n' + 1}\left[\frac{dn'}{d(\lg \tau)}\right]} \tag{4.26}$$

$$k = k' \frac{4n'}{3n' + 1} \tag{4.27}$$

Pe domeniile de valabilitate a legii puterii, ecuația (4.21) în coordonate logaritmice, va reprezenta o dreaptă, derivata din (4.26) este egală cu zero și $n = n'$. În acest caz, ecuația (4.21) devine

$$\tau_p = k\left(\frac{3n + 1}{4n}\right)\left(\frac{8v}{d}\right)^n \tag{4.28}$$

Viteza de forfecare $\dot{\gamma}$ calculată cu ajutorul debitului volumic V_s, ce curge printr-un tub de rază R, este dată de relația

$$\dot{\gamma} = \frac{4V_s}{\pi R^3} = \frac{8v}{d}$$

iar viteza de forfecare la perete $\dot{\gamma}_p$

$$\dot{\gamma}_p = \frac{3n + 1}{4n}\dot{\gamma} = \frac{3n + 1}{4n}\left(\frac{8v}{d}\right)$$

Substituind raportul $8v/d$ în ecuația (4.19) pentru $n' = n$, se obține o altă formă a legii puterii

$$\tau_p = k' \frac{4n}{3n + 1}\dot{\gamma}_p^n \tag{4.29}$$

sau, ținînd cont de corelația între k' și k [v. ec. (4.25)] rezultă

$$\tau_p = k\dot{\gamma}_p^n \tag{4.30}$$

Ecuația reologică elaborată de *Carreau* conține patru parametri

$$\eta = \eta_\infty + (\eta_0 - \eta_\infty)\left[1 + (k\dot{\gamma})^2\right]^{\frac{n-1}{2}} \tag{4.31}$$

unde η_0 și η_∞ sînt viscozitățile la viteze extreme de forfecare, n este indicele de curgere din legea puterii și k o constantă. Modelul a verificat datele experimentale obținute pentru un număr mare de soluții și topituri de polimeri.

Scanned with OKEN Scanner

Ecuația Bogdanov a fost stabilită pentru solicitarea la forfecare simplă

$$\tau = k_1 \ \text{erf} \ (k_2 \dot{\gamma}) \tag{4.32}$$

în care k_1 și k_2 sînt constante reologice. După dezvoltarea în serie a funcției erorilor, rezultă

$$\tau = 2 \frac{k_1}{\sqrt{\pi}} \left[k_2 \dot{\gamma} - \frac{(k_2 \dot{\gamma})^3}{3 \cdot 1!} + \frac{(k_2 \dot{\gamma})^5}{5 \cdot 2!} - \ldots \right] \tag{4.33}$$

Un grup de modele reologice este prezentat în tabelul 4.5. *Modelul Powell-Eyring* [v. ec. (4.13)], bazat pe o teorie a vitezei de reacție, este pasibil de interpretare termodinamică.

Tabelul 4.5

Modelele reologice

Nr. crt.	Denumirea modelului	Expresia modelului	Constanta de material	
1.	De Haven	$\eta_a = \frac{\eta_0}{1 + k\tau^n}$	η_0, k, n	4.34
2.	Sisko	$\eta_a = k_1 + k_2 \dot{\gamma}^{n-1}$	k_1, k_2, n	4.35
3.	Oldroyd	$\eta_a = \eta_0 \frac{1 + k_1 \dot{\gamma}^2}{1 + k_2 \dot{\gamma}^2}$	η_0, k_1, k_2	4.36
4.	Meter	$\eta_a = \eta_\infty + \frac{\eta_0 - \eta_\infty}{1 + (\tau/k)^n}$	$\eta_0, \eta_\infty, n, k$	4.37
5.	Van Wazer ș.a.	$\eta_a = \eta_\infty + \frac{\eta_0 - \eta_\infty}{1 + k_1 \dot{\gamma} + k_2 \dot{\gamma}^n}$	$\eta_0, \eta_\infty, k_1, k_2, n$	4.38
6.	Cross	$\eta_a = \eta_\infty + \frac{\eta_0 - \eta_\infty}{1 + k\gamma^{2/3}}$	η_0, η_∞, k	4.39
7.	Williamson	$\eta_a = \eta_\infty + \frac{\eta_0 - \eta_\infty}{1 + (\dot{\gamma}/k)^2}$	η_0, η_∞, k	4.40
8.	Williamson extins	$\eta_a = \eta_\infty + \frac{\eta_0 - \eta_\infty}{1 + (\dot{\gamma}/k)^n}$	$\eta_0, \eta_\infty, k, n$	4.41

Scanned with OKEN Scanner

Tabelul 4.5 (continuare)

Nr. crt.	Denumirea modelului	Expresia modelului	Constanta de material	
9.	Rabinowitsch	$\eta_a = \dfrac{\eta^0}{1 + k\tau^2}$	$\eta_0,\ k,\ n$	4.42
10.	Seely	$\eta_a = \eta_\infty + (\eta_0 - \eta_\infty)\ e^{-\tau/k}$	$\eta_0,\ \eta_\infty,\ k$	4.43
11.	Springgs-Bird	$\eta_a = \eta_\infty + \dfrac{3(\eta_0 - \eta_\infty)}{\pi\sqrt{k\dot\gamma}} \left\{ \dfrac{\text{sh}\ \pi\sqrt{k\dot\gamma} - \sin \pi\sqrt{k\dot\gamma}}{\text{ch}\ \pi\sqrt{k\dot\gamma} - \cos \pi\sqrt{k\dot\gamma}} \right\}$	$\eta_0,\ \eta_\infty,\ k$	4.44
12.	Springgs-Bird extins	$\eta_a = \eta_\infty + \dfrac{3(\eta_0 - \eta_\infty)}{\pi\sqrt[n]{k\dot\gamma}} \left\{ \dfrac{\text{sh}\ \pi\sqrt[n]{k\dot\gamma} - \sin \pi\sqrt[n]{k\dot\gamma}}{\text{ch}\ \pi\sqrt[n]{k\dot\gamma} - \cos \pi\sqrt[n]{k\dot\gamma}} \right\}$	$\eta_0,\ \eta_\infty,\ k,\ n$	4.45
13.	Bueche	$\eta_a = \eta_\infty + (\eta_0 - \eta_\infty) \left\{ \dfrac{2 + k\dot\gamma - \sqrt{4k\dot\gamma + k^2\dot\gamma^2}}{2} \right\}$	$\eta_0,\ \eta_\infty,\ k$	4.46
14.	Carreau	$\eta = \eta_\infty + (\eta_0 - \eta_\infty)\ [1 + (k\ \dot\gamma)^2]^{(n-1)/2}$	$\eta_0, \eta_\infty,\ k,\ n$	4.47

Modelul Oldroyd (ec. (4.36)] este o extindere neliniară a modelului Jeffreys din teoria vîscoelelasticității liniare.

Modelul Springgs-Bird (ec. [4.44)] este o extindere a tratării lui Oldroyd, încorporînd elemente ale teoriei moleculare în scopul eliminării parametrilor nedeterminați.

Al doilea model Springgs-Bird [ec. (4.45)] constituie o extindere empirică a primului model, făcută în scopul corelării mai exacte a datelor experimentale.

Modelul Bueche [ec. (4.46)] a fost stabilit pe baza unor considerații fizice referitoare la moleculele dizolvate.

Modelele Meter și Williamson extins [ec. (4.37)] și [ec. (4.41)] sînt extinderi ale modelelor elaborate de Peek — McLean și Williamson, pe baza proceselor de asociere — disociere a perechilor de molecule solvatate.

Modelul Seely [ec. (4.43)] este empiric și la tensiuni de forfecare mici este echivalent cu modelul Peek-McLean.

Scanned with OKEN Scanner

Cramer și Marchello [3] au confruntat modelele (4.13), (4.36), (4.37), (4.41), (4.43) — (4.46) cu datele experimentale obținute pentru soluții și topituri de polimeri. Ei au constatat că modelul Powel — Eyring cu cinci parametri [22] și Williamson extins dau erori medii de 7%, iar modelele Meter și Spriggs-Bird de aproximativ 10%. Celelalte modele analizate dau erori mai mari. În domeniile de comportare newtoniană corespondența între datele experimentale și modele a fost foarte bună.

Selectarea modelelor se face pe baza valabilității lor teoretice, a utilității lor în rezolvarea problemelor de curgere și a capacității lor de adaptare. Elaborarea de modele exacte și complicate din punct de vedere matematic, constituie preocupări mai mult de natură teoretică, aplicarea lor în cazurile practice fiind dificilă.

4.3. FLUIDE NENEWTONIENE DEPENDENTE DE TIMP

Fluidele nenewtoniene independente de timp au vîscozitate dependentă de parametrii solicitării. Unui corp pseudoplastic sau dilatant, la o anumită valoare a vitezei de forfecare, îi corespunde o vîscozitate independentă de timpul de solicitare și de solicitările anterioare. Aceasta se datorește faptului că modificările de structură determinate de forfecare au loc cu viteză foarte mare.

O altă categorie de corpuri la viteză de forfecare constantă, manifestă tendința de modificare în timp a tensiunii de forfecare și respectiv a vîscozității. De asemenea, comportarea depinde de istoria solicitărilor (solicitările la care a fost supus corpul înaintea experimentului actual). Aceste corpuri se numesc *dependente de timp*. Comportarea dependentă de timp se datorește proceselor de modificare lentă a structurii prin forfecare.

Fluidele nenewtoniene dependente de timp solicitate la forfecare, suferă modificări lente de structură. La scăderea vitezei de forfecare sau în repaus, fluidele reversibile își refac structura inițială, iar fluidele ireversibile păstrează structura corespunzătoare mărimii și duratei efortului de solicitare.

Din categoria fluidelor nenewtoniene dependente de timp se vor prezenta numai acele pentru care efectul timpului este reversibil.

Funcție de timp, la viteză de forfecare constantă, tensiunea ce solicită un corp cu comportare nenewtoniană, poate rămîne constantă sau

Scanned with OKEN Scanner

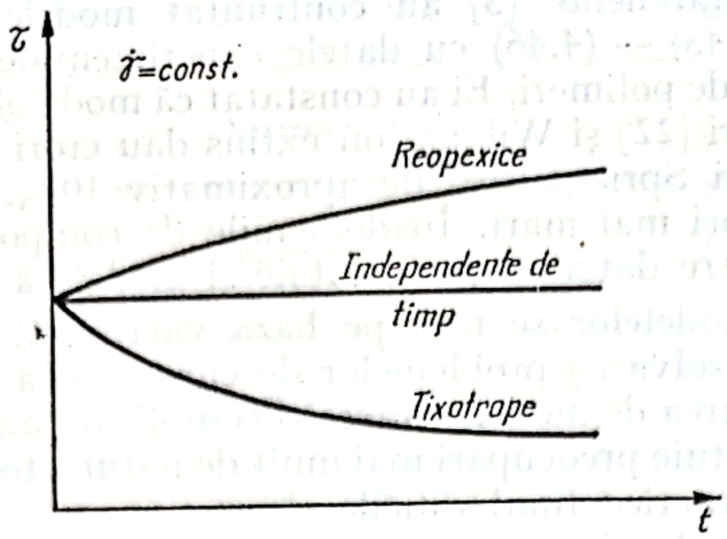


Fig. 4.5. Variația în timp a tensiunii de forfecare.

suferă modificări (fig 4.5). Creșterea tensiunii tangențiale în timp evidențiază o *comportare reopexică*, scăderea tensiunii corespunde *comportării tixotrope*, iar la fluidele independente de timp tensiunea rămîne constantă.

4.3.1. FLUIDE TIXOTROPE

Fluidele tixotrope pot avea, în afara componentei vîscoase o componentă elastică și o componentă plastică. Solicitate la forfecare în condiții izoterme apare o scădere reversibilă, dependentă de timp a modulului de elasticitate, a pragului de curgere și a vîscozității. Comportarea tixotropă a fost sesizată prima dată la dispersiile coloidale. Acestea, după un timp de repaus, se comportă ca un solid elastic cu un modul de elasticitate mic. Sub agitare, peste o anumită valoare a tensiunii, se deformează ireversibil, vîscozitatea scade și capătă proprietățile unui lichid. După un timp de ședere în repaus, sistemul revine la starea sa inițială. Fenomenul a fost pus în evidență în 1923 de Schalek și Szegvari, iar în următorii ani Freundlich și colaboratorii îi consacră un număr mare de lucrări [1].

McMillen [13—15] constată că datele experimentale obținute la viteze de forfecare continuu crescătoare nu coincid cu datele de la viteze de forfecare continuu descrescătoare. El precizează importanța istoriei forfecării asupra comportării fluidelor tixotrope.

Corpurile tixotrope în repaus prezintă o structură sau o stare de gel. Prin forfecare structura este distrusă și corpul trece în stare fluidă. După un timp de ședere în repaus, structura se reface și corpul revine la starea inițială de gel. Energia consumată, cînd un corp lichid este supus la forfecare, servește la învingerea forțelor de frecare datorate vîscozității

Scanned with OKEN Scanner

și la distrugerea structurii. Energia pentru destructurare poate fi considerată energie potențială întrucît este recîștigată într-o altă formă, atunci cînd corpul în repaus își reface structura.

Se consideră un fluid tixotrop care la timpul t_1 are vîscozitatea η_1 (fig. 4.6,*a*). De la timpul t_1 pînă la timpul t_2 este supus la forfecare cu viteză constantă $\dot{\gamma}_1$. Tensiunea scade datorită scăderii viscozității de la η_1 la η_2. La timpul t_2 este solicitat instantaneu cu o viteză de forfecare mai mare $\dot{\gamma}_2$, ce rămîne constantă pînă la timpul t_3. Vîscozitatea fluidului scade în acest interval de timp pînă la valoarea η_3. Prin solicitare la o viteză de forfecare constantă și mai mare decît cea anterioară, lichidul se destructurează și vîscozitatea scade. Viteza de scădere a vîscozității în timp $d\eta_a/dt$ tinde către zero întrucît vîscozitatea tinde către o valoare constantă (fig. 4.6, *b*). Solicitarea la viteză de forfecare constantă determină destructurarea corpului pînă ce se stabilește un echilibru între forțele de destructurare și cele de restructurare. Atît timp cît structura suferă modificări, se modifică și vîscozitatea, iar din momentul în care s-a ajuns la o structură de echilibru, vîscozitatea rămîne constantă, deși corpul este supus la forfecare constantă (fig. 4.6, *c*).

Determinările experimentale făcute cu un lichid tixotrop la viteza de forfecare variabilă prezintă un deosebit interes. Modificînd continu viteza de forfecare în sens crescător și apoi descrescător, se obține o curbă cu histerezis, (fig. 4.7, *a*). Se consideră un corp tixotrop, căruia la timpul t_0 și viteză de forfecare $\dot{\gamma}_0$, îi corespunde o stare de echilibru caracterizată de vîscozitatea η_0 (puntul *A*). Crescînd continuu viteza de forfecare, la timpul t_1 se ajunge la valoarea $\dot{\gamma}_1$, cînd vîscozitatea scade la η_1 (punctul *B*). Continuînd determinările în sensul descreșterii vitezei de forfecare, la timpul t_x viteza scade la $\dot{\gamma}_0$ și vîscozitatea crește la η_x* (punctul *A*). Pe ramura descrescătoare *BA*, structura lichidului se reface

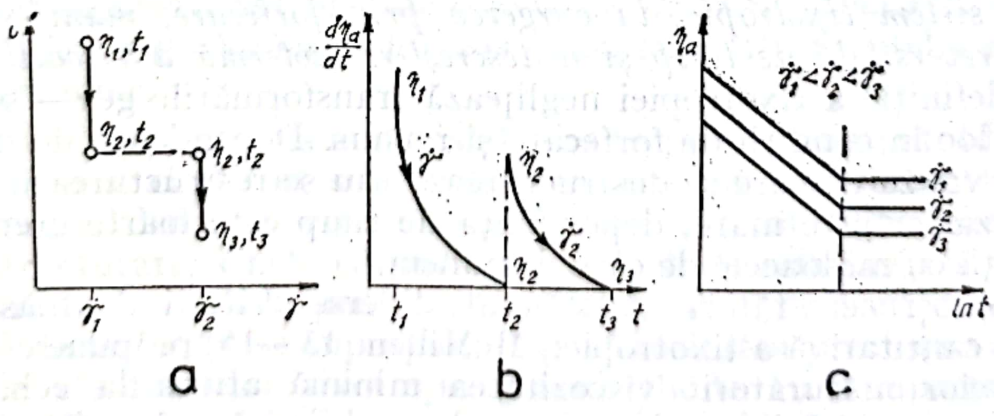


Fig. 4.6. Variația vîscozității fluidelor tixotrope, funcție de viteza de forfecare și de timp.

* Vîscozitatea este dată de tangentele la curbe în punctul *A*.

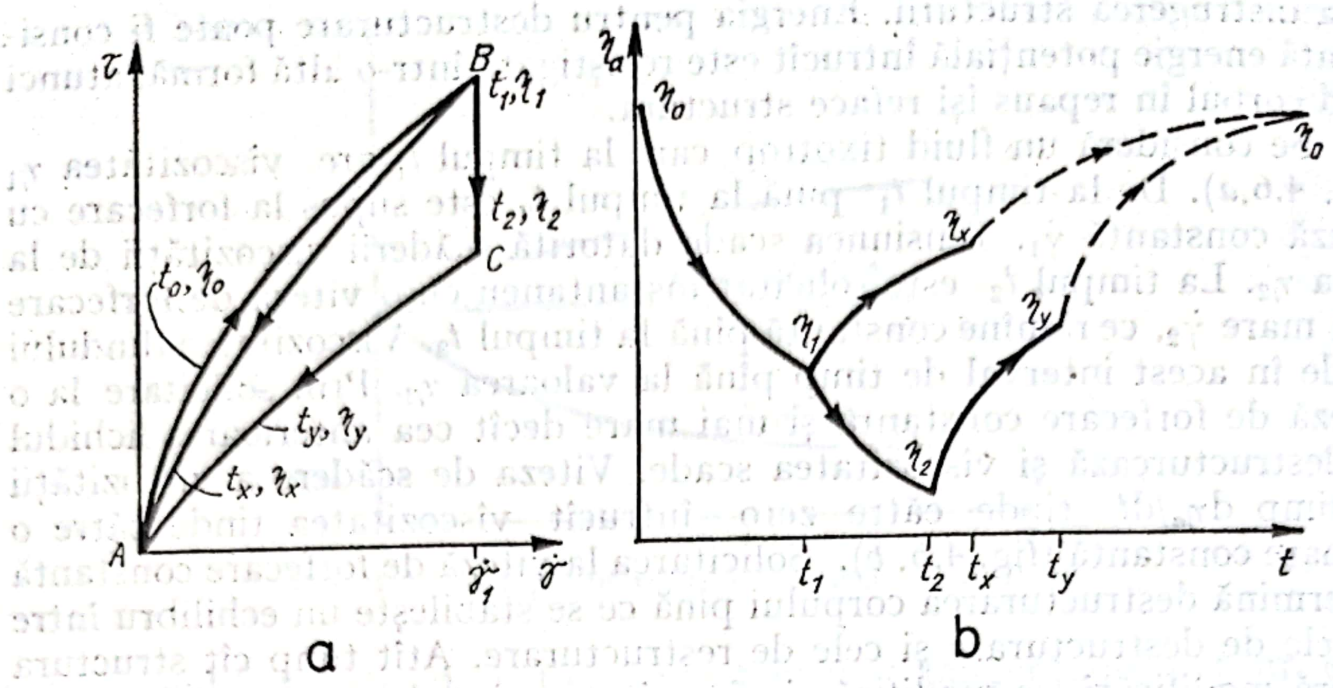


Fig. 4.7. Fluide tixotrope:
a — reograma; *b* — variația vîscozității.

parțial, fără să se ajungă la starea de echilibru corespunzătoare punctului A din această cauză $\eta_1 < \eta_x < \eta_0$. Modificarea vîscozității în timp după ciclul ABA este reprezentată în figura 4.7,*b*. După un timp de ședere în condițiile de solicitare corespunzătoare punctului A (viteza de forfecare $\dot{\gamma}_0$), structura se reface și vîscozitatea revine la valoarea η_0.

În ciclul de forfecare $ABCA$ (fig. 4.7, *a*), corpul este solicitat cu o viteză de forfecare continuu crescătoare pînă în punctul B. De la timpul t_1 la t_2 viteza de forfecare rămîne constantă și egală cu $\dot{\gamma}_1$, iar vîscozitatea scade de la η_1 la η_2 (punctul C). Pe ramura CA viteza de forfecare scade și, la timpul t_y, vîscozitatea crește pînă la η_y (punctul A). După un timp se ajunge din nou la starea de echilibru η_0 (fig. 4.7, *b*).

„Un sistem tixotropic, la curgerea prin forfecare, manifestă o dependență reversibilă de timp și o descreștere izotermă a vîscozității" [1]. Această definiție a tixotropiei neglijează transformările gel — soluție — gel ce au loc în condiții de forfecare și repaus. Dependența de timp este legată de viteza cu care se destructurează sau se restructurează lichidul. Cînd viteza lor este mare, dependența de timp este foarte greu de pus în evidență cu mijloacele de care dispunem.

Numeroși cercetători au sugerat diverse criterii de măsurare și apreciere cantitativă a tixotropiei. McMillen [13—15] propune efectuarea următoarelor măsurători: vîscozitatea minimă atinsă la echilibru în condițiile unei agitări energice, viteza de modificare a vîscozității în timp la o viteză de forfecare constantă, limita maximă de elasticitate sau pragul de tensiune și viteza cu care cresc limita de elasticitate sau pragul de tensiune după ce încetează agitarea. Deficiențele acestei metode constau

în dificultatea de a defini o stare de agitare de referință, atunci cînd se urmărește dependența vîscozității de timp și de a urmări efectul forfecării continui asupra vîscozității.

Goodeve [1] definește un *coeficient de tixotropie* a cărui valoare este dată de panta limită a curbei vîscozitate — viteză de forfecare, cînd forfecarea ajunge la valori mari. Criteriul este limitativ, putînd fi aplicat numai la acele materiale care prezintă o astfel de limită.

Green și Weltman [1,9] recomandă pentru determinări cantitative trasarea curbelor tensiune — viteză de forfecare, cu ajutorul unui viscozimetru rotativ de tip Couette. Determinările se efectuează la viteză continuu crescătoare și continuu descrescătoare. Vîscozitatea fluidului tixotrop depinde atît de valoarea vitezei de forfecare, cît și de timpul de forfecare la viteză constantă. Din această cauză dependența vîscozității de ambii factori nu poate fi pusă în evidență din ciclul rezultat la creșterea și descreșterea continuă a vitezei de forfecare.

Aceiași autori [9] definesc doi *coeficienți de destructurare tixotropă*:
— cu viteza de forfecare, la accelerație a forfecării* constantă;
— cu timpul de forfecare, la viteză de forfecare constantă.

Coeficientul de destructurare cu viteza de forfecare este proporțional cu suprafața buclei de histerezis. Suprafața și forma buclei de histerezis depinde de accelerația forfecării în sens crescător și descrescător. Cînd accelerația forfecării este extrem de mică în ambele sensuri, încît în fiecare moment procesele de destructurare și restructurare sînt în echilibru, se va obține o buclă histerezis cu suprafața redusă, lăsînd impresia unei tixotropii mai puțin pronunțate. Întrucît viteza procesului de restructurare este factorul important de care depinde suprafața buclei de histerezis, o suprafață mare semnifică un înalt grad de tixotropie, dar nu reprezintă un criteriu cantitativ.

Coeficientul tixotropic de destructurare cu timpul este dat de derivata $d\eta_0/d\,(\ln t)$. Valoarea lui este egală cu panta dreptelor reprezentate în figura 4.6,*c*.

Este de așteptat ca materialele tixotrope să prezinte totdeauna bucle de histerezis, cînd sînt supuse la forfecare continuu crescătoare și descrescătoare, deoarece viteza de destructurare este mai mare decît cea de restructurare. Unele corpuri au o viteză de refacere a structurii atît de mare încît curbele pentru sensul crescător și sensul descrescător al vitezei de forfecare se suprapun, deși vîscozitatea prezintă variații similare cu ale fluidelor tixotrope. Aceste fluide au comportare pseudoplastică. Pe această bază, unii cercetători consideră că toate materialele

*) Accelerația forfecării $\ddot{\gamma}$ este derivata vitezei de forfecare $\dot{\gamma}$ în raport cu timpul.

care la viteză de forfecare crescătoare se fluidifică ca urmare a destructurării, sînt dependente de timp. Ele se diferențiază numai prin viteze diferite de modificare a structurii; fluidele pseudoplastice se destructurează și se restructurează cu o viteză foarte mare, nesesizabilă pe cale experimentală, pe cînd la fluidele tixotrope structura se modifică cu viteze mai mici.

Folosirea buclei de histerezis cu un criteriu pentru tixotropie este limitată de vitezele de restructurare foarte mari și de vitezele extrem de reduse. Unele materiale, a căror structură a fost distrusă prin forfecare, în condiții izoterme nu se mai pot restructura. În aceste cazuri trebuie să se ia în considerație istoria solicitărilor. Dintenfass [1] recomandă pentru studiul materialelor tixotrope o stare de referință a solicitărilor, pentru care există echilibru între forțele de destructurare și restructurare, cu o istorie a solicitărilor controlată. Modificarea proprietăților funcție de timp trebuie studiată în raport cu starea de referință. El definește două criterii cantitative: *timpul de recuperare* și *panta tixotropică*.
Primul criteriu este reprezentat de timpul necesar ca un material să treacă de la o stare de echilibru, căreia îi corespunde o vîscozitate constantă, la o altă stare de echilibru caracterizată de o nouă valoare constantă a vîscozității, cînd viteza de forfecare este diminuată instantaneu. Vitezele de forfecare corespunzătoare celor două stări sînt constante. Timpul de recuperare tixotropică este o mărime cantitativă, măsurată după ce sistemul a fost adus într-o stare definită a forfecării, pentru care istoria solicitărilor nu mai prezintă importanță. Peste o anumită valoare a solicitărilor denumită *viteza de forfecare critică*, vîscozitatea rămîne constantă. Dependența logaritmică între vîscozitatea aparentă, măsurată în condiții de echilibru, și viteza de forfecare este o dreaptă a cărei pantă definește panta tixotropică. Timpul de recuperare pentru stabilirea echilibrului între două stări de referință reprezintă o mărime cantitativă definită precis, care poate furniza informații asupra comportării tixotrope. Măsurarea lui se face cu viscozimetre rotative. Corpul este solicitat la viteză de forfecare constantă $\dot{\gamma}_0$ pentru a se atinge echilibru și vîscozitatea η_0 să rămînă constantă (fig. 4.8). La timpul t_0 viteza de forfecare se micșorează brusc la valoarea $\dot{\gamma}_1$ și se menține constantă. Fluidul atinge starea de echilibru la timpul t_1. Intervalul de timp $t_1 - t_0$ necesar ca vîscozitatea să varieze între două stări de echilibru, de la η_0 la η_1, reprezintă timpul de recuperare.

Principalele variabile ce se iau în considerație pentru caracterizarea comportării tixotrope sînt: tensiunea de forfecare, viteza cu care se aplică tensiunea, deformația, viteza de forfecare, accelerația forfecării, timpul și temperatura. Aceste variabile se recomandă să fie menținute constante în timpul determinărilor, fără să se facă medierea lor. În condiții izo-

Scanned with OKEN Scanner

terme se impun valorile unor variabile și se măsoară variația în timp a celorlalte variabile.

În fig. 4.9 sînt reprezentate cîteva reograme ale fluidelor tixotrope. Aceste corpuri, după cum s-a mai precizat, manifestă dependență reversibilă de timp și se fluidifică sub acțiunea forfecării. Mecanismul răspunzător de comportarea tixotropă se află în dependența structurii de mărimea, durata și istoria solicitărilor. Corpul se destructurează în sensul crescător al vitezei de forfecare și se restructurează în sens descrescător.

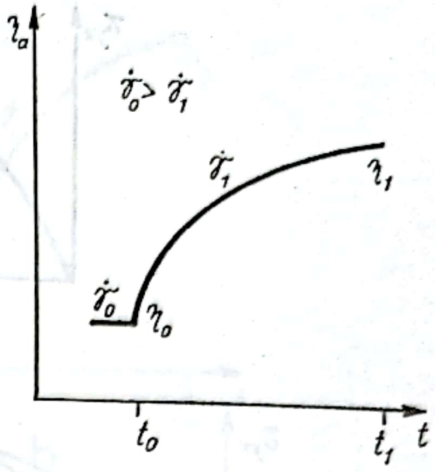


Fig. 4.8. Determinarea timpului de recuperare.

Procesele de destructurare și restructurare se desfășoară cu diferite viteze, funcție de proprietățile fluidului. Dacă ambele viteze sînt foarte mari, încît nu pot fi detectate pe cale experimentală cu aparatura de care dispunem, curbele obținute în sensul crescător și descrescător al vitezei de forfecare se suprapun (fig. 4.9, *a*).A ceste corpuri sînt considerate indepenente de timp, cu comportare pseudoplastică. Toate fluidele care manifestă dependența de timp măsurabilă prezintă bucle de histerezis.

Considerînd suprafața buclei de histerezis un criteriu informativ al comportării tixotrope, se poate afirma că reograma din fig. 4.9, *b* corespunde unui corp cu o ușoară tixotropie, ce manifestă restructurare continuă în sens descrescător. Unele corpuri își refac structura numai în domeniul vitezelor mici de forfecare (fig. 4.9,*c*). Pe intervalul de solicitări în care structura nu suferă modificări, linia descedentă se prezintă sub formă dreaptă.

Reogramele din fig. 4.9, *d* și *e* sînt caracteristice unor lichide cu tixotropie foarte pronunțată. Ambele fluide nu prezintă restructurări în sens descedent și vîscozitatea rămîne constantă. Primul fluid necesită un timp de repaos pentru a-și reface structura și a se putea reproduce curba superioară. Cel de al doilea fluid prezintă o structură ireversibilă. La repetarea determinărilor se va reproduce dreapta inferioară, oricît de mare ar fi timpul de repaus.

Comportarea tixotropă este caracteristică pentru foarte multe fluide: suspensii de amidon, latexuri, fluide biologice, soluții de gelatină, suspensii de celuloză și de pigmenți, albuș de ou, grăsimi, geluri de săpun de aluminiu, noroaie de sondă, soluții de polimeri, unt, etc. Cunoașterea proprietăților reologice este necesară pentru procesele de prelucrare și pentru utilizarea lor.

Scanned with OKEN Scanner

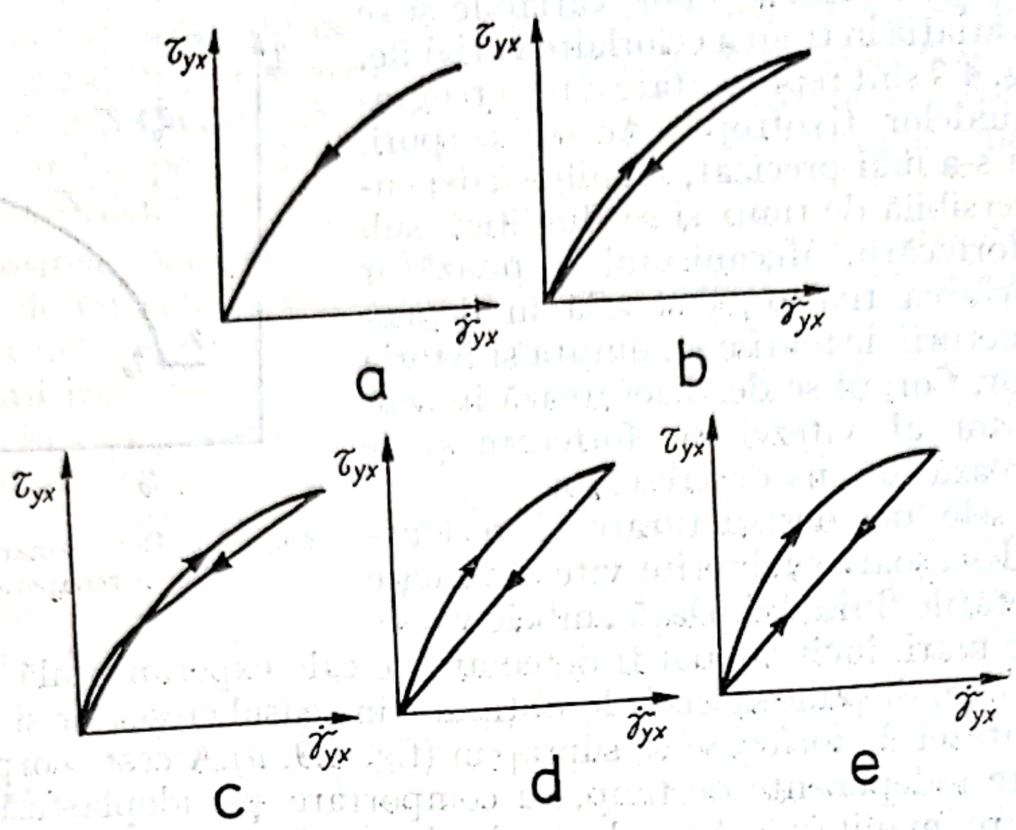


Fig. 4.9. Reograme ale fluidelor tixotrope:

a — comportarea pseudoplastică; *b* — ușoară tixotropie cu restructurare continuă în sens descrescător; *c* — tixotropie pronunțată cu restructurare în sens descrescător în domeniul vitezelor mici de forfecare; *d* — tixotropie foarte pronunțată cu restructurare lentă; *e* — tixotropie pronunțată fără restructurare.

4.3.2. FLUIDE REOPEXICE

Corpurile dilatante (v. §4.2.2) manifestă o creștere izotermă reversibilă a vîscozității cu creșterea vitezei de forfecare, fără dependență de timp. Fluidele reopexice sau antitixotrope prezintă o comportare reologică similară, cu o dependență de timp măsurabilă. Curbele obținute la viteză de forfecare continuu crescătoare și continuu descrescătoare sînt distincte.

Dependența de timp este evidențiată prin bucle de histerezis.

Vîscozitatea unui fluid reopexic depinde de mărimea vitezei de forfecare și durata forfecării. Influența ambilor factori este greu de identificat în ciclul de creștere și descreștere a vitezei de forfecare. Un material reopexic, caracterizat printr-o stare de echilibru între procesele de structurare și destructurare, va avea vîscozitatea aparentă η_1. La timpul t_1 este solicitat cu o viteză de forfecare constantă $\dot{\gamma}_1$. Vîscozitatea crește continuu și la timpul t_2, corespunzător unei noi stări de echilibru, ajunge la valoarea limită η_2 (fig. 4.10, *a*). Dacă la timpul t_2 viteza de forfecare este modificată instantaneu la $\dot{\gamma}_2$ și menținută constantă,

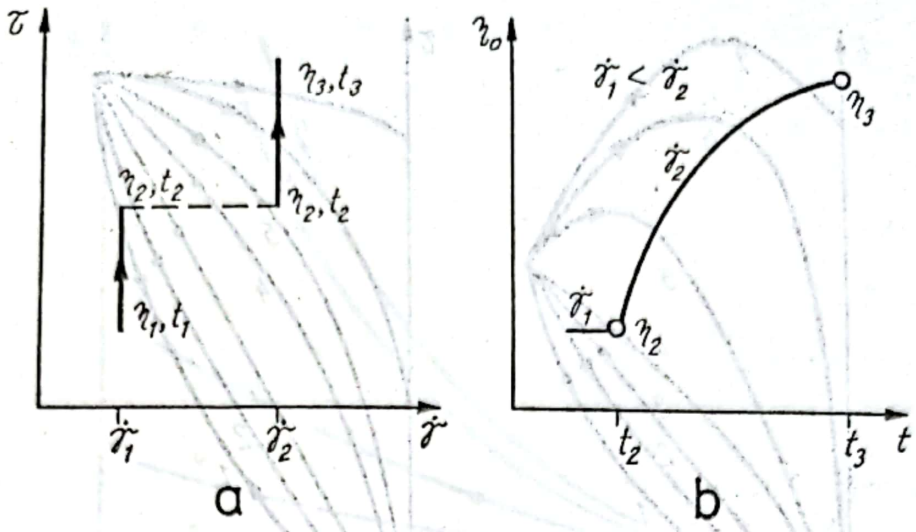


Fig. 4.10. Variația vîscozității fluidelor reopexice funcție de viteza de forfecare și de timp.

vîscozitatea crește din nou și la timpul t_3, corespunzător echilibrului, ajunge la valoarea maximă η_3. Variația vîscozității aparente în timp, la viteză de forfecare constantă rezultă din fig. 4.10, *b*.

Mecanismul răspunzător de comportarea reopexică este similar cu cel al comportării dilatante (v.§4.2.2). La creșterea vitezei de forfecare fluidul se structurează și se destructurează la scăderea vitezei. Procesele de structurare și de destructurare în cazul fluidelor reopexice se desfășoară cu viteză finită, măsurabile, pe cale experimentală. Cînd ambele procese se desfășoară cu viteză suficient de mică, curba descrescătoare este diferită de curba crescătoare. Bucla de histerezis se datorește distrugerii structurii formate în perioada de creștere a vitezei de forfecare. Viteza de destructurare depinde de accelerația fierfecării în sens crescător. Dacă accelerația forfecării este mare, în sensul crescător, se realizează numai o parte din structura corespunzătoare stării de forfecare, întrucît viteza de creștere a vitezei de forfecare depășește viteza de structurare. În acest caz structurarea continuă și pe curba descrescătoare [11].

În figura 4.11 sînt prezentate reogramele caracteristice comportării reopexice. Un corp reopexic supus forfecării cu viteză crescătoare va descrie curba *1* (fig. 4.11,*a*). Cînd vitezele de structurare sînt foarte mari, curba obținută la descreșterea continuă a vitezei de forfecare se va suprapune peste curba crescătoare. Acest corp este considerat independent de timp, cu comportare dilatantă. Fluidele dependente de timp a căror viteză de destructurare este finită, în sens coborîtor, vor reproduce curbele *2*, *3* sau *4*, funcție de gradul de reopexie pe care-l prezintă. În unele cazuri, cînd accelerația forfecării în sens crescător este mare, procesul de structurare continuă pe o porțiune a ramurii descrescătoare a vitezei de forfecare, după care începe destructurarea, curbele *5* și *6*.

Scanned with OKEN Scanner

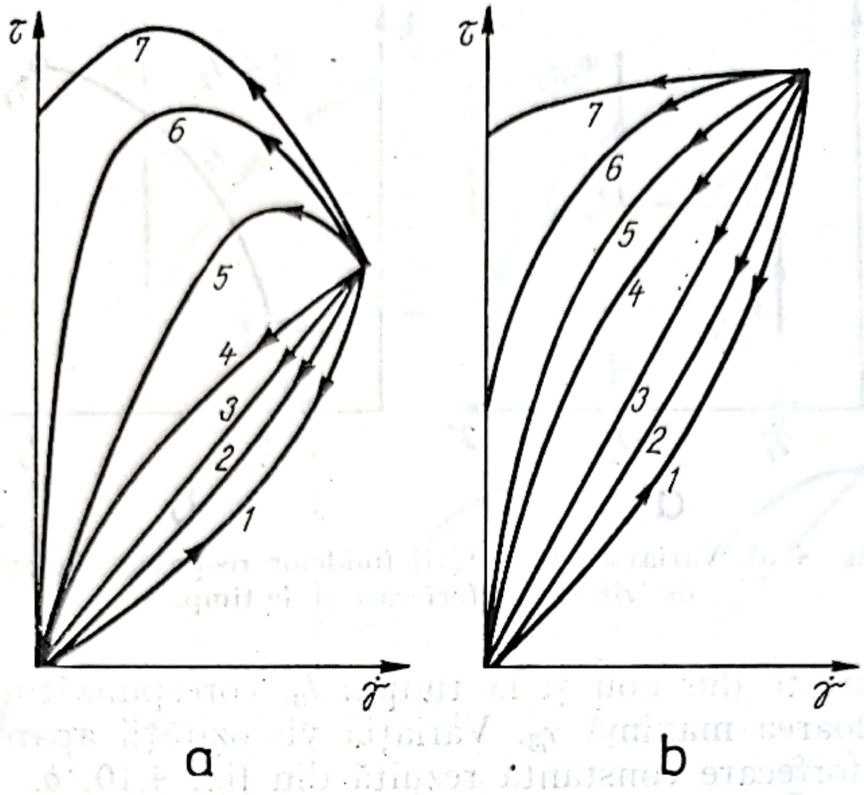


Fig. 4.11. Reograma fluidelor reopexice [11]:
a — accelerația mare a forfecării; *b* — accelerația mică a forfecării

Comportări de acest fel au fost observate la suspensiile apoase formate din amidon și argilă [11]. În cazurile extreme, procesul de structurare poate avea loc continuu, atît pe ramura crescătoare, cît și pe ramura descrescătoare, pînă la o viteză de forfecare egală cu zero, curba 7. Numai după o perioadă îndelungată de timp tensiunea scade la valoarea zero [11].

Cercetările experimentale pot fi efectuate la diverse valori ale accelerației forfecării. Dacă accelerația în sens crescător este suficient de mică, întreaga structură este realizată pe ramura ascendentă, fără să continue pe ramura descedentă și curbele din fig. 4.11, *a* devin identice cu cele din fig. 4.11, *b*[11].

Datele din figura 4.11, *a* s-au reprezentat în fig. 4.12 prin dependența vîscozității aparente de viteza de forfecare. Se observă că la creșterea vitezei de forfecare vîscozitatea aparentă crește, curba *1*, ceea ce se poate atribui unui proces de structurare.

În sens descrescător, conform curbei *2*, vîscozitatea scade, ca urmare a destructurării fluidului. Dreapta *3* indică o vîscozitate constantă, deci la descreșterea vitezei de forfecare nu apar modificări în structura corpului. Celelalte curbe (*4*—*7*) indică o creștere a vîscozității la descreșterea vitezei de forfecare. Probabil că aceste fluide continuă să se structureze pe ramura descedentă, pe întregul domeniu de solicitare.

Scanned with OKEN Scanner

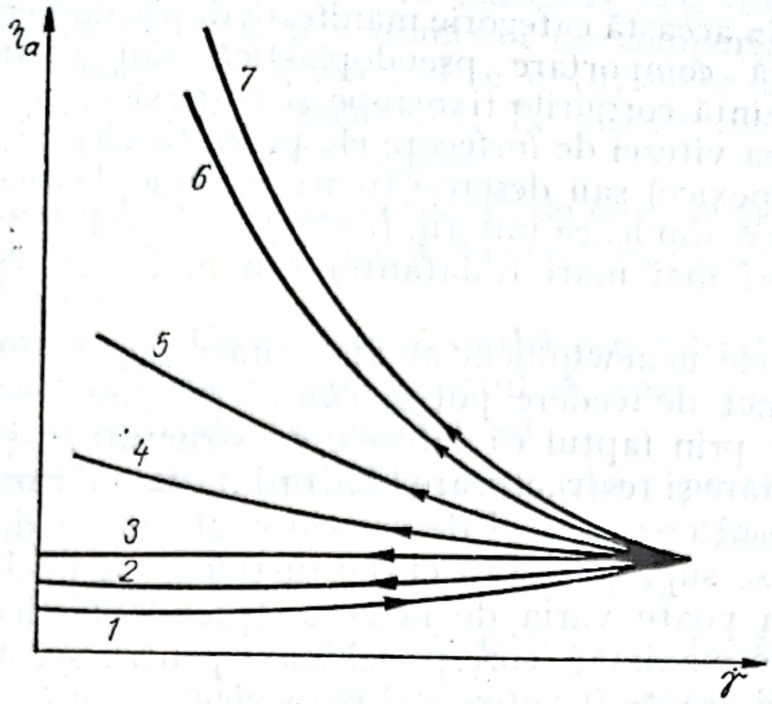


Fig. 4.12. Dependența vîscozității fluidelor reopexice de viteza de forfecare (conform fig. 4,11, *a*).

Comportarea reopexică a fost pusă în evidență la suspensiile de pentaoxid de vanadiu, de gips, de pămînturi bentonitice, la soluțiile diluate de oleat de amoniu etc.

4.4. REPREZENTAREA GENERALIZATĂ A COMPORTĂRII REOLOGICE A FLUIDELOR NENEWTONIENE

Comportarea reologică a fluidelor vîscoase nenewtoniene, discutate în prezentul capitol, permite stabilirea unor concluzii generalizatoare de importanță teoretică și practică. Pe baza acestora se poate înțelege și explica comportarea fluidelor reale.

Fluidele nenewtoniene dependente sau independente de timp, la viteze mici de forfecare au un domeniu de comportare newtoniană domeniu care, în unele cazuri, poate fi foarte restrîns. Comportarea newtoniană se datorește lipsei de modificări în masa structurată (pseudoplastice și tixotrope) sau nestructurată (dilatante și reopexice) a fluidului. Unele lichide eronat sînt considerate newtoniene, fiindcă abaterea de la dreaptă apare numai în domeniul vitezelor mari de forfecare sau atunci cînd nu se ia în considerație istoria solicitărilor.

Scanned with OKEN Scanner

Lichidele din această categorie manifestă după domeniul de comportare newtoniană comportare pseudoplastică sau dilatantă. Aceeași comportare prezintă corpurile tixotrope și reopexice.

La creșterea vitezei de forfecare ele prezintă vîscozități crescătoare (dilatante și reopexice) sau descrescătoare (pseudoplastice și tixotrope). Indicele de curgere din legea puterii, funcție de sensul de variație a vîscozității, are valori mai mari (dilatante) sau mai mici (pseudoplastice) decît unu.

Toate lichidele nenewtoniene au vîscozitate dependentă de structură și din acest punct de vedere pot fi considerate dependente de timp. Ele se deosebesc prin faptul că vitezele de structurare și destructurare sau de destructurare și restructurare, ca ordin de mărime, pot fi mari sau mici. În sensul crescător și descrescător al vitezei de forfecare pot forma curbe ce se suprapun sau curbe distincte cu buclă de histerezis. Suprafața buclei poate varia de la zero (pseudoplastice, și dilatante) pînă la o valoare maximă, corespunzătoare pentru sensul descrescător al forfecării, unei drepte (tixotrope și reopexice).

Lichidele pseudoplastice și dilatante pot fi considerate dependente de timp, dependență care nu poate fi pusă în evidență pe cale experimentală. Suprafața buclei de histerezis este egală cu zero.

Lichidele pseudoplastice și dilatante, pe un anumit domeniu de forfecare izotermă, prezintă modificări de structură și vîscozitate. Peste o anumită limită se ajunge la o structură stabilă și comportarea devine din nou newtoniană.

Ostwald sugerează o *curbă generalizată de curgere*, (fig. 4.13) Pe curba de curgere a lui Ostwald (curba *1*) se disting patru domenii: Dreapta *OA* corespunde primului domeniu de comportare newtoniană. De la *A* la *B* comportarea este pseudoplastică, iar de la *B* la *C* dilatantă. După punctul *C* urmează al doilea domeniu newtonian. Comportarea nenewtoniană prezintă un punct de inversiune *B* ce marchează trecerea de la domeniul pseudoplastic la cel dilatant.

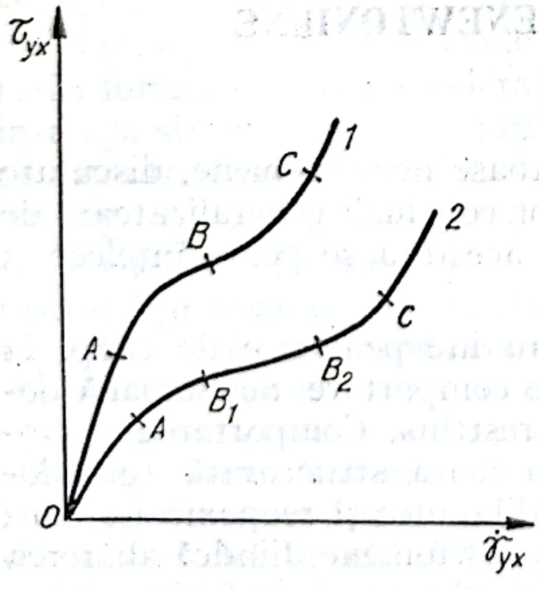


Fig. 4.13. Curbe generalizate de curgere.

Curba de curgere a lui Ostwald poate fi adusă la un grad mai mare de generalitate, dacă între domeniile de comportare pseudoplastică și dilatantă, se intercalează un domeniu newtonian (curba *2*). Aceasta este *curba generalizată de curgere*. Ea conține trei domenii de comportare newto-

Scanned with OKEN Scanner

niană, despărțite de domeniul pseudoplastic AB și domeniul dilatant B_2C. Existența celui de al treilea domeniu de comportare newtoniană este discutabilă, deoarece experimental se obțin curbe care tind asimptotic către o dreaptă. De asemenea, la viteze mari de forfecare domeniul curgerii laminare este depășit.

Lenk [11], bazat pe curba generalizată de curgere și pe posibilitatea de restrîngere, lărgire sau contopire a domeniilor, explică toate tipurile de comportări reologice:

— *Fluid newtonian*: Un corp cu o curbă generalizată de curgere, la care modificarea comportării după punctul A, apare la viteze de forfecare foarte mari, nerealizabile experimental.

— *Lichid pseudoplastic*: Corpul la care curba generalizată de curgere poate fi stabilită pe cale experimentală pînă la o limită situată între punctele A și B_2, în condiții de curgere laminară.

— *Lichid dilatant*: Materialul cu curbă generalizată de curgere, pentru care primul domeniu newtonian, domeniul pseudoplastic și uneori o parte din al doilea domeniu newtonian, apar succesiv la viteze de forfecare mici și nu pot fi separate pe cale experimentală.

— *Corpul plastic*: Materialul cu curbă generalizată de curgere la care primul domeniu de comportare newtoniană se suprapune pe axa tensiunilor de forfecare, după care urmează domeniul pseudoplastic și, posibil, o parte din al doilea domeniu newtonian (v. cap.6).

— *Plasticul Bingham*: Un corp cu curbă generalizată de curgere, la care primul domeniu newtonian coincide cu axa tensiunilor, domeniul de comportare pseudoplastică este atît de restrîns, încît primul domeniu newtonian pare să fie urmat imediat de cel de al doilea domeniu newtonian. Domeniul dilatant nu mai poate fi obținut pe cale experimentală (v. cap. 6).

— *Lichidul Ostwald*: Corespunde unui material cu curbă generalizată de curgere, la care al doilea domeniu de comportare newtoniană este atît de restrîns, încît se reduce la un punct de inversie ce marchează trecerea de la domeniul pseudoplastic la cel dilatant.

Conceptul de curbă generalizată de curgere este important, atît pentru comportarea reologică a fluidelor, cît și pentru comportarea reologică a solidelor. După cum va rezulta din capitolele 14—16, la corpurile solide care sufăr deformații mari, curbele de dependență tensiune — deformare sînt similare.

Scanned with OKEN Scanner

BIBLIOGRAFIE

1. BAUER, W. H. și COLLINS, E. A., *Tixotropy and dilatancy*. In: Eirich, F. E.Rheology. Theory and Applications, Vol. IV. New-York, Academic Press, 1967.
2. COLEMAN, B. D., MARKOVITZ, H. și NOLL, W., *Viscometric flows on non-newtonian fluids. Theory and experiment*. Berlin, Springer-Verlag, 1966.
3. CRAMER, S. D. și MARCHELLO, J. M. In: A.I.Ch. E. J., 14, 1968, p. 814.
4. ELIASSOF, J., SILBERBERG, A. și KATCHALSKY, A., In: Nature, 176, 1955 p. 1119
5. FISCHER. E. K., *Colloidal dispersions*, New York, Wiley and Sons, 1950.
6. FORQUET, R., In: Materie Plastiche, 21, 1955, p. 371.
7. FREUNDLICH, H. și JONES, A. D. In: J. Phys. Chem., 40, 1936, p. 1217.
8. FREUNDLICH, H. și RODER, H. L., In: Trans. Faraday Soc., 34, 1938, p. 308.
9. GREEN, H. și WELTMANN, R. In: Ind. Eng. Chem., 18, 1946, p. 167.
10. HAN, C. D., *Rheology in polymer processing*, New York, Academic Press, 1976.
11. LENK, R. S., *Plastics rheology*, London, Maclaren and Sons, 1968.
12. McKELVEY, J. M., *Polymer Processing*, New York, Wiley and Sons, 1962.
13. McMILLEN, E. L., In: J. Rheol., 3, 1932, p. 75.
14. McMILLEN, E. L., In: J. Rheol. 3, 1932, p. 164.
15. McMILLEN, E. L. In: J. Rheol., 3, 1932, p. 179.
16. METZNER, A. B. și WHITLOCK, M., In: Trans. Soc. Rheol., 2, 1958, p. 239.
17. MIDDLEMAN, S., *The flow of high polymers. Continuum and molecular rheology*. New York, Interscience publisher, 1968.
18. PRYCE-JONES, J., In: Kolloid — Z. 129, 1952, p. 96.
19. PRYCE-JONES, J., In: Proc. Univ. Durham. Phil. Soc. 10, 1948, p. 427.
20. REINER, M., *Deformation, strain and flow*, London H. K. Lewis, 1960.
21. SKELLAND, A. H., *Non-newtonian flow and heat transfer*, New York, Wiley and Sons, 1967.
22. TUDOSE, R. Z., *Procese și utilaje în industria de prelucrare a compușilor macromoleculari*, București, Editura tehnică, 1976.
23. VERWEY, E. J. W. și de BAER, J. In: Rec. Trav. Chim., 57, 1939, p. 383.

Scanned with OKEN Scanner

5

CORPURI VÎSCOELASTICE

5.1. INTRODUCERE

În capitolele anterioare s-au discutat fluidele cu comportare liniară sau neliniară care posedă numai vîscozitate. Numeroase corpuri, lichide sau solide, supuse la solicitări disipează numai o parte din energie, iar o parte o înmagazinează. După descărcare, deformația este parțial recuperată. Aceste corpuri cu proprietăți multiple sînt simultan vîscoase și elastice sau, altfel spus, sînt vîscoelastice.

Comportarea vîscoelastică este caracteristică unui număr mare de corpuri în stare solidă sau lichidă. Fluidele supuse la o solicitare, diferită de presiunea hidrostatică, se deformează continuu fără să ajungă la o stare de echilibru a deformației, ca urmare a stabilirii echilibrului dinamic între forțele externe și cele interne. Deformația crește în timp pînă la suprimarea solicitării, iar vîscozitatea este o măsură a forțelor de rezistență. Un solid, sub acțiunea unei solicitări, se deformează pînă la o stare de echilibru static între forțele externe și interne. Modulul de elasticitate exprimă gradul de deformare sub acțiunea forțelor externe.

Deosebirea între comportările corpurilor solide și lichide este clară, dar insuficientă. Schimbarea temperaturii poate modifica starea de agregare și comportarea corpului. Dar comportarea unui corp este afectată și de mărimea și starea solicitărilor. Un material cu prag de tensiune în domeniul solicitărilor mici, se comportă ca un solid, iar peste valoarea pragului de tensiune devine fluid. Comportarea fluidă poate fi limitată atunci cînd corpul este ecruisabil. Sînt cunoscute fluidele (v. cap. 4) care sub acțiunea forfecării se fluidifică sau se rigidizează, ca urmare a modificărilor de structură.

Scanned with OKEN Scanner

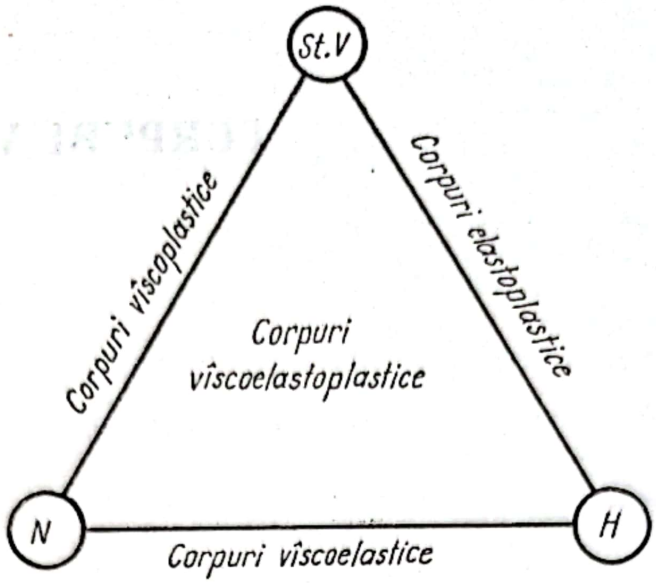


Fig. 5.1. Triunghiul comportărilor reologice

Clasificarea comportării corpurilor nu poate fi făcută numai pe baza stării de agregare. Trebuie să se țină cont de condițiile specifice, de nivelul solicitărilor, de scara timpului și de domeniul temperaturilor. Din acest punct de vedere nu este indicat să se facă referiri în termeni absoluți la lichide sau solide, ci mai curînd la materiale cu manifestare lichidă sau cu manifestare solidă.

Diversitatea comportării corpurilor reale este consecința asocierii mai multor proprietăți — vîscozitate, elasticitate, plasticitate — în diverse proporții. De exemplu, soluțiile și topiturile de polimeri au proprietăți vîscoelastice, oțelurile sînt elastoplastice, iar unele geluri au comportare vîscoplastică sau vîscoelastoplastică.

Triunghiul comportărilor reologice (fig. 5.1) oferă imaginea posibilităților de asociere a celor trei proprietăți reologice. Dacă în vîrful triunghiului echilateral se reprezintă corpurile cu proprietăți unitare, laturile vor fi formate din totalitatea punctelor ce reprezintă comportarea corpurilor ce posedă două proprietăți în diverse proporții. Celor trei laturi le corespund comportările: *vîscoplastică*, *vîscoelastică* și *elastoplastică*. Punctele din interiorul triunghiului reprezintă corpuri cu comportare *vîscoelastoplastică*.

Materialele cu comportare reologică vîscoelastică formează obiectul acestui capitol.

Scanned with OKEN Scanner

5.2. EFECTE SPECIFICE CORPURILOR VÎSCOELASTICE

Răspunsul corpurilor vîscoelastice depinde de istoria solicitărilor. Din acest punct de vedere se pot împărți în:

— *Corpuri cu memorie infinit scurtă* a căror comportare la timpul t este influențată numai de solicitările care au avut loc la timpul din imediata vecinătate a lui t. Răspunsul este influențat numai de istoria recentă a solicitărilor și ecuația de comportare este de formă diferențială.

— *Corpuri cu memorie descrescătoare* sau *corpuri care uită* prezintă comportări care sînt influențate dominant de solicitările mai apropiate de prezent și ecuațiile de comportare reologică au formă integrală.

Numeroase materiale, din care fac parte și compușii macromoleculari, posedă prorietăți fizico-mecanice variabile în timp. Aceste modificări nu sînt cauzate de solicitări repetate, deci nu sînt rezultatul istoriei solicitării. Ele sînt consecința unor transformări lente, cel mai posibil de natură chimică. Materialele a căror proprietăți fizico-mecanice se modifică continuu în timp sînt numite *corpuri cu îmbătrînire*. Dacă comportarea reologică a materialului nu depinde de istoria solicitărilor, ci numai de intervalul de timp socotit din momentul încărcării, atunci acesta se va numi *corp ereditar*.

Numeroase corpuri în stare lichidă au comportare diferită, în comparație cu cele descrise de modele simple. Particularitățile acestei comportări se datoresc asocierii la componenta vîscoasă a unei componente elastice. Ridicarea lichidelor pe o tijă în rotație, umflarea jeturilor la ieșire din capilară și formarea valurilor și a fracturilor pe suprafața extrudatelor de polimeri, sînt cîteva efecte caracteristice corpurilor vîscoelastice.

5.2.1. EFECTUL DE RIDICARE PE TIJĂ

O tijă verticală, parțial imersată într-un volum limitat de lichid prin rotire în jurul axei de simetrie, produce efecte dependente de comportarea reologică. Lichidele cu componentă elastică — vîscoelastice — se ridică pe tijă, în timp ce lichidele pur vîscoase, prin antrenare în mișcarea de rotație, formează o pîlnie (fig. 5.2).

Fenomenul de ridicare pe tijă a fost observat pentru prima dată de Garner și Nissan [14] și ulterior explicat de Weissenberg [51] pe baza tensiunilor normale la direcția de curgere. El este numit *efectul Weissenberg*.

Scanned with OKEN Scanner

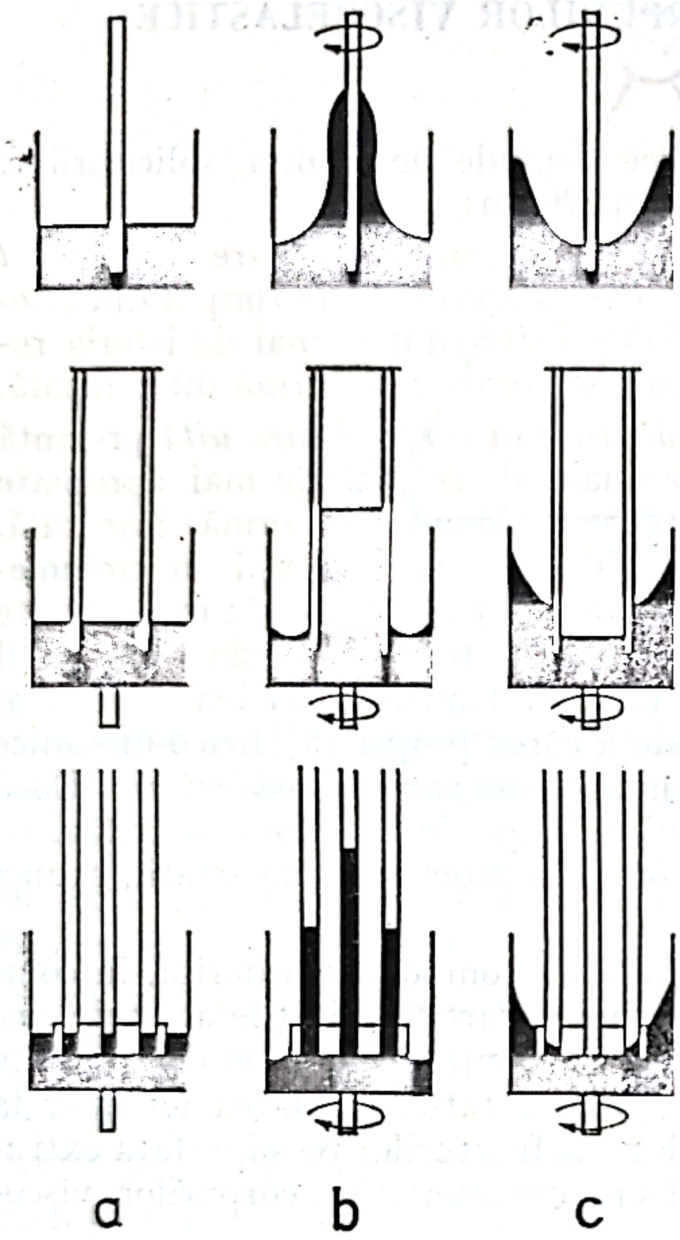


Fig. 5.2. Efectul Weissenberg:
a — în repaus; *b* — în rotație — lichide vîscoelastice; *c* — în rotație — lichide newtoniene.

Soluțiile apoase de poliacrilamidă (6%) sau carboximetilceluloză (3%), soluțiile de poliizobutilenă (10%) în decalină sau de polimetilmetacrilat (18%) în *n*-acetat de butil, topiturile de polimeri etc., sînt vîscoelastice. Toate prezintă fenomenul de ridicare pe tija în rotație sau în interiorul unui tub gol, scufundat cu un capăt în masa lichidului în rotație. Experiențele efectuate cu două plăci, una fixă și alta acționată, între care se introduce un lichid vîscoelastic, pune în evidență o distribuție neuniformă a presiunii; în axa de rotație presiunea prezintă un maxim și scade pe direcție radială. Distribuția presiunii poate fi măsurată cu ajutorul unor tuburi manometrice montate în placa fixă (fig. 5.2, *b*).

Prezența componentei elastice la o soluție de săpun de aluminiu într-un solvent organic a fost demonstrată de Philippoff printr-o experiență simplă. El a introdus, prin cădere liberă, o bilă de sticlă în masa soluției și a observat că bila oscilează pe verticală cu amplitudine din ce în ce mai mică. Oscilațiile sînt manifestări ale componentei elastice a soluției.

Eforturile normale ce iau naștere prin rotirea unei tije în masa unui fluid vîscoelastic nu pot fi echilibrate dinamic în condițiile unei suprafețe plane. Lichidul se ridică pe tijă pînă la o înălțime corespunzătoare echilibrului între forțele normale și cele gravitaționale. Forța gravitațională acționează asupra masei de fluid ce depășește suprafața liberă a acestuia. La turație constantă, cu un lichid omogen, se atinge un regim staționar, cînd înălțimea de ridicare nu mai variază și în masa antrenată apare o curgere de tipul celei ilustrate în fig. 5.3.

Scanned with OKEN Scanner

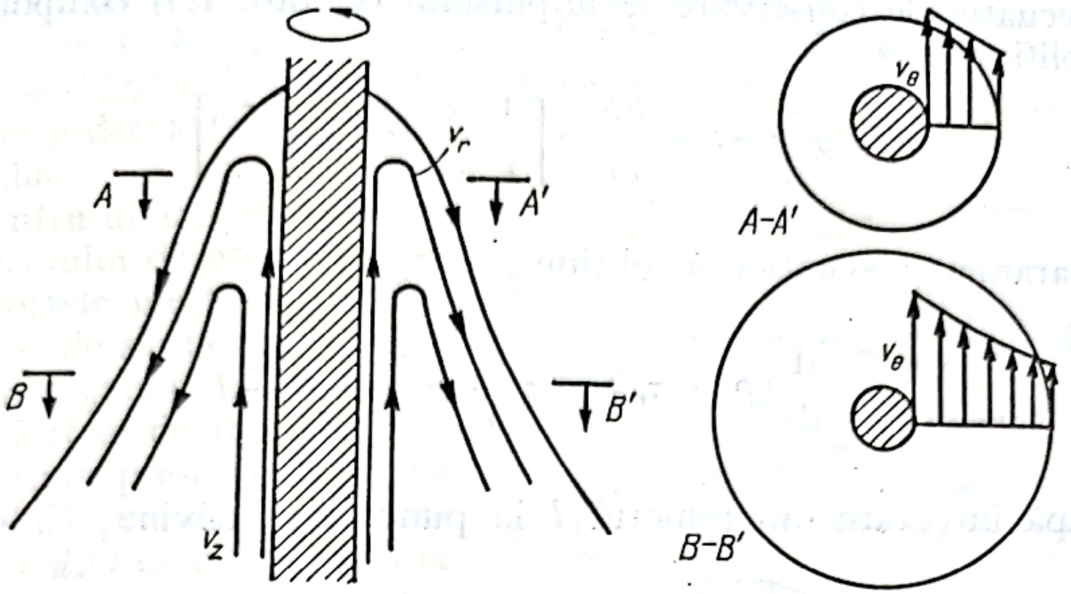


Fig. 5.3. Distribuția vitezelor în lichidul ridicat pe tijă.

Într-un sistem de coordonate cilindrice (r, θ, z) componentele vitezei vor fi v_r, v_θ și v_z. Datorită simetriei, componenta v_θ este independentă de unghiul θ; ea variază pe direcție radială (secțiunile $A-A'$ și $B-B'$ din fig. 5.3). Principala componentă a forfecării este $r \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{v_\theta}{r}\right)$ Dacă se ia în considerație numai curgerea tangențială, este posibil ca pentru o clasă de fluide simple*, definite de Noll, să se stabilească soluții formale pe baza funcțiilor $\eta(\dot{\gamma})$, $\psi_1(\dot{\gamma})$ și $\psi_2(\dot{\gamma})$ [v. ec. (4.2)]. Totuși pentru distribuția tensiunilor trebuie să se ia în considerație și forțele de frecare datorate gradienților vitezei axiale și radiale [34].

Se consideră un lichid conținut în spațiul dintre doi cilindri. Cilindrul interior de raza R_i are turație constantă, iar cilindrul exterior, de rază R_e, este fix. Dacă se iau două puncte, I situat pe cilindrul interior și E pe cilindrul exterior, diferența presiunilor între cele două puncte, depinde de comportarea reologică a lichidului.

Un volum elementar de fluid în curgere staționară va descrie o traiectorie circulară. În coordonate cilindrice, singura componentă a vitezei, diferită de zero este v_θ(v. fig. 5.3), care variază numai după direcție radială. Din ecuația continuității (v. tab. 1.5) rezultă

$$\frac{dv_\theta}{d\theta} = 0 \tag{5.1}$$

* Conceptul de fluid simplu al lui Noll de fapt este foarte complex.

și din ecuația de conservare a impulsului (v. tab. 1.9) componenta r se simplifică la

$$-\rho\frac{v_\theta^2}{r}=-\frac{\partial p}{\partial r}-\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\tau_{rr})-\frac{\tau_{\theta\theta}}{r}\right] \tag{5.2}$$

Prin rearanjarea ecuației se obține

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}(p+\tau_{rr})=\rho\frac{v_\theta^2}{r}+\frac{\tau_{\theta\theta}-\tau_{rr}}{r}$$

care după integrare din punctul I la punctul E, devine

$$(p+\tau_{rr})_E-(p+\tau_{rr})_I=\int_{R_i}^{R_e}\left(\rho\frac{v_\theta^2}{r}+\frac{\tau_{\theta\theta}-\tau_{rr}}{r}\right)\mathrm{d}r \tag{5.3}$$

Într-un fluid newtonian toate componentele tensiunilor normale sînt egale cu zero ($\tau_{rr}=\tau_{\theta\theta}=\tau_{zz}=0$) și diferența de presiune $p_E-p_I>0$ este dată de forța centrifugă. Pentru lichide vîscoelastice, diferența $\tau_{\theta\theta}-\tau_{rr}$ este negativă și mai mare decît forța centrifugă dată de primul termen de sub integrală, ceea ce demonstrează că $(p+\tau_{rr})_E<(p+\tau_{rr})_I$.

5.2.2. UMFLAREA JETULUI

Lichidele pur vîscoase, la ieșirea dintr-un tub cu secțiune circulară, au un jet cu diametrul descrescător. Un efect contrar se observă la fluidele vîscoelastice. La ieșirea dintr-un tub jetul se umflă (fig. 5.4, *a* și *b*).

Numeroase cercetări au fost făcute cu tuburi sau capilare scurte. Umflarea jetului crește substanțial dacă tubul este scurt. Din fig. 5.4, *c* rezultă mecanismul pe baza căruia se poate explica efectul umflării. Un element de volum de fluid de forma *1*, în timpul trecerii prin tub, suferă o alungire pe direcția curgerii (forma *2*). Energia elastică înmagazinată este recuperată printr-o umflare accentuată a jetului (forma *3*). Datorită comportării elastice, forma *3* a elementului de volum este bazată pe forma *1*, pentru care posedă „memorie". Contribuția componentei elastice la umflare se diminuează dacă crește lungimea tubului.

În regim staționar, expandarea jetului este axial simetrică. Liniile de curent la ieșirea dintr-un tub lung, în zona exterioară a jetului se

Scanned with OKEN Scanner

apropie și se îndepărtează în zona centrală. Aceasta se datorește accelerării lichidului la periferie și decelerării în partea din mijloc.

Pentru abordarea teoretică a efectului de umflare a jetului, forțele inerțiale, gravitaționale și de suprafață se consideră neglijabile, în comparație cu forțele de frecare și cu gradienții de presiune. Mărimea măsurabilă pe cale experimentală $\beta = d_j/d$ este raportată la parametrii specifici comportării vîscoelastice. Ipotezele teoretice se bazează pe tensiunile normale sau pe recuperarea elastică.

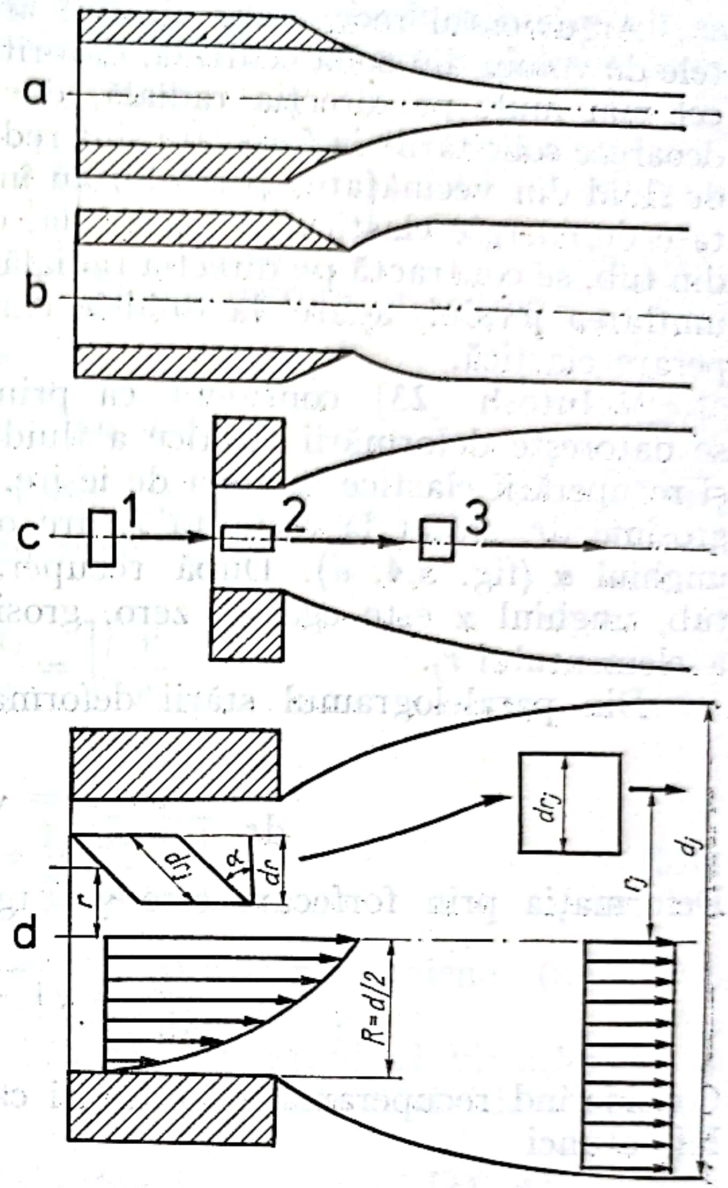


Fig. 5.4. Modificarea diametrului jetului.

La ieșirea din tub presiunea este egală cu cea a mediului ambiant. Pentru a raporta tensiunile normale în direcție axială, la tensiunile normale în direcție radială, sînt utilizate ecuațiile de echilibru a tensiunilor împreună cu prima și a doua diferență a tensiunilor normale [v. ec. (4.2)]. În interiorul tubului, la capătul de ieșire, tensiunile normale radiale sînt mai mari decît tensiunile medii axiale, ceea ce explică umflarea jetului în momentul în care este eliberat de îngrădirea pereților.

Recuperarea elastică este ilustrată în fig. 5.4, *d*. Un element de volum ce curge prin tub, fără alunecare la perete, sub acțiunea tensiunilor de forfecare va lua o formă reprezentată printr-un paralelogram. Datorită componentei elastice el înmagazinează o parte din energie, care este o funcție unică de gradientul de viteză al forfecării. La ieșirea din tub, forțele de forfecare sînt îndepărtate și elementul tinde către forma inițială, netensionată, reprezentată printr-un dreptunghi. Astfel are loc umflarea jetului.

Scanned with OKEN Scanner

Argumentul recuperării elastice are unele inconveniente. Elementele de volum din zona centrală, datorită decelerării, trebuie să se dilate cel mai mult pe direcția radială, dar deformația elastică este mică, deoarece solicitările la forfecare sînt reduse. Pe de altă parte, elementele de fluid din vecinătatea peretelui au înmagazinată cea mai mare cantitate de energie elastică, recuperabilă, dar datorită accelerării la ieșirea din tub, se contractă pe direcția radială. Cu siguranță se poate afirma că umflarea jetului apare la fluidele care manifestă fenomenul de recuperare elastică.

McIntosh [23] consideră că principala cauză a umflării jetului se datorește deformării elastice a fluidului în timpul curgerii prin tub și recuperării elastice în zona de ieșire. Un element de volum inelar de grosime dr, situat la distanța r, are o deformație caracterizată prin unghiul α (fig. 5.4, *d*). După recuperarea deformației, la ieșirea din tub, unghiul α este egal cu zero, grosimea devine dr_j și poziția radială a elementului r_j.

Din paralelogramul stării deformate se poate scrie

$$\frac{dr_j}{dr} = \sec \alpha = \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} \tag{5.4}$$

Deformația prin forfecare este $\gamma = \operatorname{tg} \alpha$ și ecuația devine

$$\frac{dr_j}{dr} = \sqrt{1 + \gamma^2} \tag{5.5}$$

Considerînd recuperarea deformației ca singură cauză a umflării jetului, atunci

$$\frac{R_j}{R} = \frac{1}{R}\int_0^{R_j} dr_j = \frac{1}{R}\int_0^R \sqrt{1 + \gamma^2}\, dr \tag{5.6}$$

sau, după introducerea variabilei adimensionale $x = r/R$

$$\frac{R_j}{R} = \int_0^1 \sqrt{1 + \gamma^2}\, dx \tag{5.7}$$

Modificarea profilului vitezelor în zona de ieșire contribuie la variația diametrului jetului. Din bilanțul valorilor medii ale impulsurilor, raportate la unitatea de masă de fluid, în zona de ieșire și în jet, rezultă

$$\bar{v}_j = \frac{1}{\bar{v} \cdot R^2}\int_0^R 2rv^2\, dr \tag{5.8}$$

Scanned with OKEN Scanner

în care $\bar{v}_j$ este viteza medie a jetului, $\bar{v}$ viteza medie în tub și v viteza locală în tub. Expresia vitezei locale pentru fluide ce respectă legea puterii este dată de ecuația [48]:

$$v = \bar{v}\left(\frac{3n+1}{n+1}\right)\left[1-\left(\frac{r}{R}\right)^{(n+1)/n}\right] \tag{5.9}$$

După substituția vitezei locale în (5.5) și integrare, se obține

$$\frac{\bar{v}}{\bar{v}_j} = \frac{2n+1}{3n+1} \tag{5.10}$$

Pentru fluide necompresibile, debitul volumic rămîne constant și vitezele medii pot fi corelate cu diametrele

$$\frac{d_j}{d} = \sqrt{\frac{\bar{v}}{\bar{v}_j}}$$

și mai departe

$$\frac{d_j}{d} = \sqrt{\frac{2n+1}{3n+1}} \tag{5.11}$$

Din ultima ecuație rezultă că jetul lichidelor newtoniene ($n = 1$) la ieșire suferă o contracție de 13% [$(d_j/d) = 0{,}87$].
Fluidele pseudoplastice ($n < 1$) prezintă un profil al vitezelor ce se apropie de o curgere de tip piston, rearanjarea profilului la ieșire este mai simplă și $(d_j/d) > 0{,}87$.
Pentru fluidele dilatante ($n > 1$) rezultă $(d_j/d) < 0{,}87$ [24, 47].

Considerînd efectul rearanjării vitezelor și al recuperării elastice ca fiind cumulative, din ecuațiile (5.4) și (5.8) rezultă

$$\beta = \frac{d_j}{d} = \sqrt{\frac{2n+1}{3n+1}} + \int_0^1 \sqrt{1+\gamma^2}\,dx - 1 \tag{5.12}$$

Rezolvarea integralei necesită o expresie pentru distribuția radială a deformației elastice. Folosind modelul Voigt-Kelvin, cu elasticitate întîrziată, [v. ec. (3.15)], pentru un experiment dat, tensiunea tangențială τ_k și timpul de solicitare t sînt funcție numai de poziția radială x. Deci.

$$\gamma(x) = \frac{\tau}{G}\left[1 - e^{-t/t_1}\right] \tag{5.13}$$

Scanned with OKEN Scanner

unde G este modulul de elasticitate și $t_I = (\eta/G)$ este timpul de întîrziere. Se poate calcula valoarea medie a deformației cu expresia

$$\sqrt{1+\gamma_m^2} = \int_0^1 \sqrt{1+\gamma^2}\, dx \tag{5.14}$$

și ecuația (5.9) devine

$$\beta = \sqrt{\frac{2n+1}{3n+1}} + \sqrt{1+\gamma_m^2} - 1 \tag{5.15}$$

Valoarea aproximativă a deformației medii se obține cu

$$\gamma_m = \frac{\tau_m}{G}\left[1 - e^{-t_m/t_I}\right] \tag{5.16}$$

în care tensiunea medie de forfecare τ_m și timpul mediu de reținere t_m sînt definite de relațiile [23]:

$$\tau_m = \beta_{x=1/2} = \frac{R\Delta p}{2L}$$

$$t_m = \frac{\pi R^2 L}{V_s} = 2\left(\frac{L}{d}\right)\left(\frac{3n+1}{n}\right)\left(\frac{\tau^0}{2\gamma^0\tau_m}\right)^{1/n} \tag{5.17}$$

Din ecuațiile (5.12) —(5.14) rezultă că β este o funcție unică de Δp. Această dependență prezintă un maxim, iar limitele, la valori extreme ale căderii de presiune, sînt aceleași

$$\lim_{\Delta p \to 0} \beta = \lim_{\Delta p \to \infty} \beta = \sqrt{\frac{2n+1}{3n+1}} \tag{5.18}$$

Prezența unui maxim al lui β funcție de Δp se datorește elasticității întîrziate a corpului Voigt-Kelvin luat în considerație. Creșterea presiunii determină creșterea tensiunii de forfecare și a deformației elastice. În condiții de solicitare constantă, deformația elastică crește în timp, tinzînd asimptotic către o limită. Pe de altă parte, creșterea presiunii conduce la creșterea vitezei de curgere, respectiv la micșorarea timpului de solicitare și a deformației elastice. Aceste două efecte contrare explică existența maximului.

Scanned with OKEN Scanner

Un experiment interesant a fost efectuat de Lodge [2] cu un lichid vîscoelastic. El a umplut un tub cu acest lichid, l-a lăsat în repaus un timp mai mare decît cel corespunzător memoriei, după care l-a îndepărtat cu ajutorul unui plunjer. Jetul la ieșire a prezentat o umflare pronunțată. Fenomenul a fost explicat pe baza relaxării tensiunilor în lungul liniilor de curent, ceea ce, în cazul fluidelor necompresibile, se manifestă prin expansiune transversală și contracție longitudinală.

Tanner [42], pe baza teoriei lui Lodge, a stabilit pentru umflarea jetului, la ieșirea din tuburi de lungime mare, următoarea relație

$$\frac{d_j}{d} = 0{,}1 + \left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{\tau_{11} - \tau_{22}}{2\tau_{21}}\right)_p^2\right]^{1/6} \tag{5.19}$$

în care indicele p precizează că tensiunile din paranteză sînt corespunzătoare peretelui.

Umflarea jetului — efectul Barus — se manifestă la extruderea topiturilor și soluțiilor de polimeri. Considerarea lui este impusă de proiectarea filierelor.

5.2.3. CURGEREA INSTABILĂ

La curgerea topiturilor de polimeri prin capilare sau orificii de diverse configurații apare un fenomen numit fractură, turbulență elastică sau curgere instabilă. Prin creșterea tensiunii de forfecare, se ajunge la o *valoare critică*, de ordinul 10^5 N/m², de la care jetul de topitură prezintă distorsiuni [44]. Cele mai simple distorsiuni se prezintă sub formă de *încrețituri* ale suprafeței extrudatului. Mărimea acestora este de 0,1—0,2 din diametru.

Distorsiuni mai pronunțate apar sub forma unor *extrudate ondulate*. Neregularitățile sînt uneori periodice, caracterizate printr-o „lungime de undă" de ordinul diametrului. De exemplu politetrafluoretilena extrusă la 370°C, în condiții de solicitare crescătoare, formează produse ce se prezintă sub formă de *elice*, de „con de pin" sau de *fragmente separate* [45]. Neregularitățile produselor extruse pot fi axial simetrice, periodice de diverse configurații sau complet dezordonate.

Distorsiunile de tipul ondulațiilor apar peste un debit critic, proporțional cu puterea a treia a diametrului capilarei prin care are loc curgerea topiturii. Valorile debitului critic descresc cu creșterea masei molare și cu descreșterea temperaturii. Experimental s-a constatat că materialul din care este construită capilarea influențează de asemenea valoarea debitului critic [5].

Scanned with OKEN Scanner

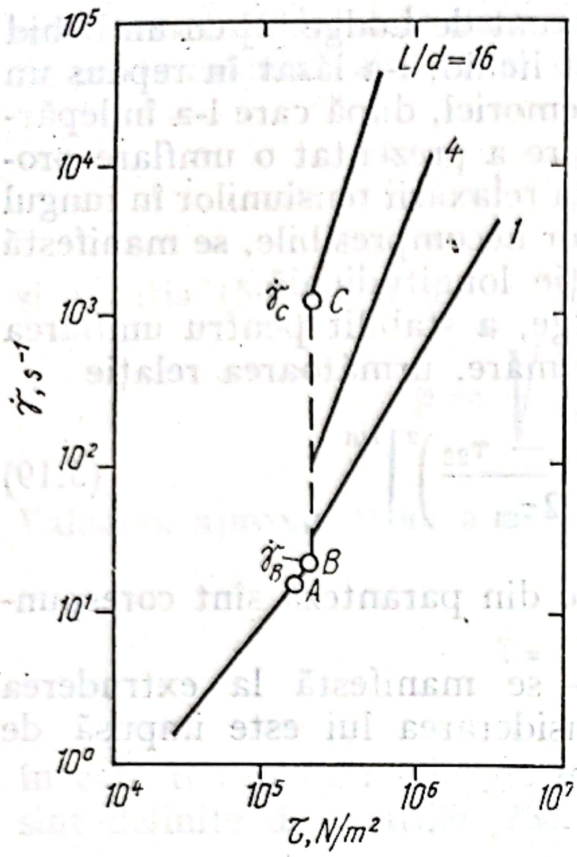


Fig. 5.5. Reogramele polimerilor ce manifestă fenomenul de încreţire a suprafeţei.

Încreţirea suprafeţei extrudatului poate fi însoţită de efecte secundare. Încreţiturile apar la polietilena de înaltă densitate şi la copolimerul cristalin de tetrafloretilenă şi hexafluorpropilenă. Reogramele obţinute cu capilare [3, 46] de diverse rapoarte între lungime şi diametru sînt transpuse schematic în fig. 5.5 [44].

La tensiuni de forfecare mai mici decît cele corespunzătoare punctului A, jetul de topitură este normal, cu suprafaţa netedă. Începînd din punctul A pînă în punctul B jetul prezintă încreţituri pronunţate pe suprafaţă. Punctului B îi corespunde a doua tensiune critică cu 50—150% mai mare decît prima tensiune critică din punctul A. La a doua tensiune critică, punctul B, viteza de forfecare oscilează între limite foarte largi, pe linia BC. Valoarea maximă a vitezei de forfecare depinde de raportul între lungimea şi diametrul capilarei. Rapoartele mari favorizează oscilaţii mari, ce pot depăşi de peste 10 ori valoarea lui $\dot{\gamma}_B$. Oscilaţiile vitezei de forfecare între $\dot{\gamma}_B$ şi $\dot{\gamma}$ influenţează structura suprafeţei extrudatului; la $\dot{\gamma}_B$ suprafaţa este încreţită, iar la $\dot{\gamma}_C$ este netedă. La tensiuni superioare punctului B extrudatul este neted pe un domeniu larg de viteze de forfecare. Acest fenomen de formare a extrudatelor netede la tensiuni de forfecare superioare celor de iniţiere a încreţiturilor, este un efect secundar, diferit de cel al curgerii instabile, caracterizat prin creşterea continuă a neregularităţilor cu tensiunea [44].

În timpul oscilaţiilor vitezei de forfecare, pistonul reometrului acţionat pneumatic se deplasează cu o viteză fluctuantă, cu o frecvenţă de aproximativ 20 perioade pe secundă. Comportarea se datoreşte interacţiunii dintre reometru şi topitura vîscoelastică, a cărei energie înmagazinată este eliberată intermitent [44].

Curgerea instabilă este explicată cu ajutorul mai multor mecanisme.

Scanned with OKEN Scanner

Conform unuia, instabilitatea s-ar datora *apariției turbulenței*, ca urmare a depășirii valorii critice a numărului Reynolds

$$\mathrm{Re} = \frac{\bar{v}\, d\rho}{\eta} = \frac{4 V_s \rho}{\pi\, d\eta} \tag{5.20}$$

în care Vs este debitul volumic, d diametrul capilarei, η vîscozitatea și ρ densitatea topiturii. Pentru ca turbulența să apară, debitul critic ar trebui să varieze cu puterea întîia a diametrului și a vîscozității, conform relației (5.17). Debitul critic determinat pe cale experimentală variază cu puterea a treia a diametrului și invers cu vîscozitatea [44]. Valorile critice ale numărului Reynolds sînt foarte mici în comparație cu valoarea clasică și depind de natura polimerului. Ele variază între $5 \cdot 10^{16}$ pentru politetrafloretilenă și 4 pentru poliamida 66 [28, 38]. Rezultatele experimentale nu sînt în favoarea ipotezei turbulenței.

Mecanismul bazat pe *efectele de capăt*, consideră că ridurile de pe suprafața extrudatului apar la o valoare critică a gradului de umflare, prin ondularea jetului. Atunci cînd între suprafața exterioară și miezul jetului este depășită o anumită valoare critică a diferenței între deformațiile elastice, jetul de topitură flambează [44]. Deformația, la intrare și în capilară, este axial simetrică și este greu de presupus că neregularitățile jetului sînt consecința acestora.

Udarea *intermitentă* a suprafeței capilarei în capătul de ieșire, conform unei alte ipoteze, ar putea constitui cauza formării încrețiturilor superficiale [16]. Neregularitățile de pe suprafața jetului sînt generate amonte de capătul de ieșire, ceea ce vine în contradicție cu o astfel de ipoteză.

Fenomenul de cavitație, discutabil în cazul de față, după Hutton [18] ar putea fi cauza instabilităților. Distorsinuile jetului sînt consecința cavitației, care se manifestă atunci cînd energia înmagazinată în polimerul supus forfecării, depășește energia necesară pentru formarea de noi suprafețe. Datele experimentale, obținute cu un viscozimetru cu con și placă, au confirmat ipoteza.

Energia necesară pentru a crea *noi suprafețe* într-o capilară ar trebui să varieze cu raportul L/R. Viteza de forfecare critică, dependentă de energia înmagazinată, ar fi de așteptat să crească cu raportul L/R, ceea ce nu se verifică experimental. Viteza critică este independentă de acest raport.

Topiturile de polimeri se comportă vîscoelastic. O parte din energia necesară curgerii este înmagazinată, iar cea mai mare parte se disipează sub formă de căldură. Energia disipată atinge un maximum în vecinătatea peretelui capilarei. Creșterea temperaturii diminuează vîscozitatea și creează condiții de apariție a instabilității. Estimările acestui

Scanned with OKEN Scanner

efect [22] au arătat că modificările de temperatură și vîscozitate, cauzate de disipație sînt neesențiale și efectul este de minimă importanță.

Distorsiunea macromoleculelor spiralate, față de poziția lor de echilibru, sub acțiunea forfecării constituie deformația elastică. Curgerea instabilă este posibil să apară atunci cînd este depășită o *deformație elastică critică*. Mai mulți autori au determinat deformația elastică critică la care apar fracturile jetului de topitură și au găsit valori cuprinse între 3 și 15 unități [44].

Tensiunea critică de inițiere a fracturilor este o funcție descrescătoare de masa molară și crescătoare în raport cu temperatura. Bagley [4] a stabilit că tensiunea critică este independentă de cei doi parametri, ceea ce sugerează un mecanism de rupere. Procesului de rupere i se asociază forțe de dispersie. Dependența tensiunilor de rupere și a forțelor de dispersie, funcție de temperatura și masa molară a polimerului este opusă. Astfel, ruperea trebuie să ia în considerație dependența de timp a lichidului vîscoelastic. Pentru viteze de forfecare suficient de mari sau la solicitări aplicate într-un timp scurt, deformația topiturii este elastică și ruperea are loc ca urmare a incapacității acesteia de a se deforma elastic în continuare.

Ipoteza apariției fracturilor (ruperilor) la o anumită deformație critică a fost verificată experimental de mai mulți autori [44]. Rezultatele au arătat că deformația elastică crește liniar cu tensiunea de forfecare pînă la o anumită limită, după care creșterea este foarte accentuată. Peste deformația critică, macromoleculele din soluție se desfășoară, iar în cazul topiturilor apar ruperi instantanee. „Turbulența de structură", atribuită de unii autori [37] fenomenului de creștere a vîscozității peste o anumită valoare critică a tensiunii de forfecare, este consecința desfășurării lanțurilor macromoleculare.

5.2.4. EFECTUL UEBLER

Metoda *bulei de hidrogen* este folosită pentru stabilirea liniilor de curent, măsurarea vitezei de curgere a unui lichid sau a modificărilor de viteză. Bule de dimensiuni mici, antrenate de lichid, sînt trasori ce furnizează informații importante asupra curgerii.

E. A. Uebler [29, 49] a constatat că bulele de dimensiuni adecvate, într-o soluție de polimer, la îngustarea bruscă a secțiunii, se opresc în fața secțiunii de intrare, deși lichidul continuă să curgă (fig. 5.6). Efectul se manifestă la bulele ce se deplasează pe linia centrală de curgere și au diametrul 1/6 pînă la 1/8 din diametrul tubului mic. Deci, efectul

Scanned with OKEN Scanner

constă în oprirea bruscă a bulei într-un cîmp cu viteze accelerate, a unui lichid cu proprietăți vîscoelastice.

Se consideră o bulă de dimensiuni mari imersată într-o soluție de polimer. La trecerea lichidului dintr-o secțiune mare într-o secțiune mică, liniile de curent au forma indicată în fig. 5.6. Volumele elementare de fluid în mișcare accelerată, sub acțiunea tensiunilor normale, orientate pe direcția de curgere, sufăr o alungire, ceea ce generează o forță F normală la direcția de curgere. Această forță acționează pe circumferința bulei și determină o rezultantă orientată în sensul contrar curgerii. Forțele de frecare dintre bulă și lichid, tind s-o antreneze în tubul de secțiune mică. În condiții de echilibru dinamic, cele două forțe de sensuri contrare se anulează și bula de gaz staționează în fața intrării în secțiunea îngustată.

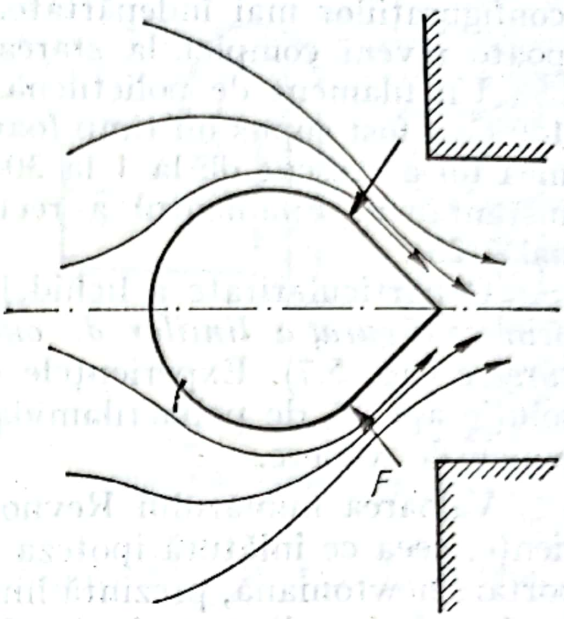


Fig. 5.6. Efectul Uebler.

Efectul Uebler prezintă interes, atît în cercetările experimentale, cît și în unele operații industriale. Industria materialelor polimerice expandate prelucrează sisteme eterogene formate din gaze dispersate în topituri de polimeri.

5.2.5. ALTE EFECTE

Fenomenul de *recul* sau *revenire* diferențiază comportarea vîscoelastică a topiturilor și soluțiilor de polimeri de comportarea lichidelor newtoniene. Kapoor [8] injectează într-un tub cu soluție de 2% carboximetilceluloză un trasor format dintr-o suspensie de cărbune. Aplică un scurt timp un gradient de presiune și urmărește deformația dîrei de trasor. După îndepărtarea gradientului de presiune, dîra trasorului se retrage parțial ca urmare a revenirii lichidului.

Experimentul pune în evidență două proprietăți ale lichidului: componenta elastică și atenuarea „memoriei". Componenta elastică determină retragerea lichidului în sens opus curgerii, atunci cînd se îndepărtează forța externă. Prin memorie se înțelege însușirea lichidului de a reține starea de la care a plecat. Atenuarea memoriei face ca memoria configurațiilor sau stărilor recente să fie mai bună decît cea a

Scanned with OKEN Scanner

configurațiilor mai îndepărtate. Ca urmare a acestui fapt, lichidul nu poate reveni complet la starea lui inițială.

Un filament de polietilenă de joasă densitate, cu temperatura de 150°C, a fost supus un timp foarte scurt la un efort de întindere. Lungimea lui a crescut de la 1 la 30 cm, după care un capăt a fost eliberat instantaneu. Filamentul a recuperat 3 cm din deformația longitudinală [25].

O particularitate a lichidelor vîscoelastice a fost pusă în evidență prin *configurația liniilor de curent la îngustarea bruscă a secțiunii de curgere* (fig. 5.7). Experiențele efectuate cu glicerină (fig. 5.7, *a*) și cu soluție apoasă de poliacrilamidă (fig. 5.7, *b*) sînt concludente din acest punct de vedere.

Valoarea numărului Reynolds a fost foarte mică în ambele experiențe, ceea ce înlătură ipoteza apariției turbulenței. Glicerina, cu comportare newtoniană, prezintă linii de curent drepte, orientate către intrarea în tubul cu diametrul mic. Soluția vîscoelastică de poliemer are zone largi de recirculare. Numai central apare o zonă conică restrînsă, în care liniile de curent converg către tubul de dimensiuni mici [8].

O particularitate a fluidelor nenewtoniene, în comparație cu cele newtoniene, a fost pusă în evidență în experiențele de descărcare a unui recipient prin sifonare. Un sifon amorsat este ridicat lent, încît capătul prin care se aspiră este scos din lichid. În cazul lichidelor newtoniene sifonul se dezarmorsează imediat. Dacă lichidul este nenewtonian, sifonul *continuă* să funcționeze (fig. 5.8, *a*). Un „filament" se ridică din masa lichidului către capătul de aspirație și continuă să curgă prin sifon.

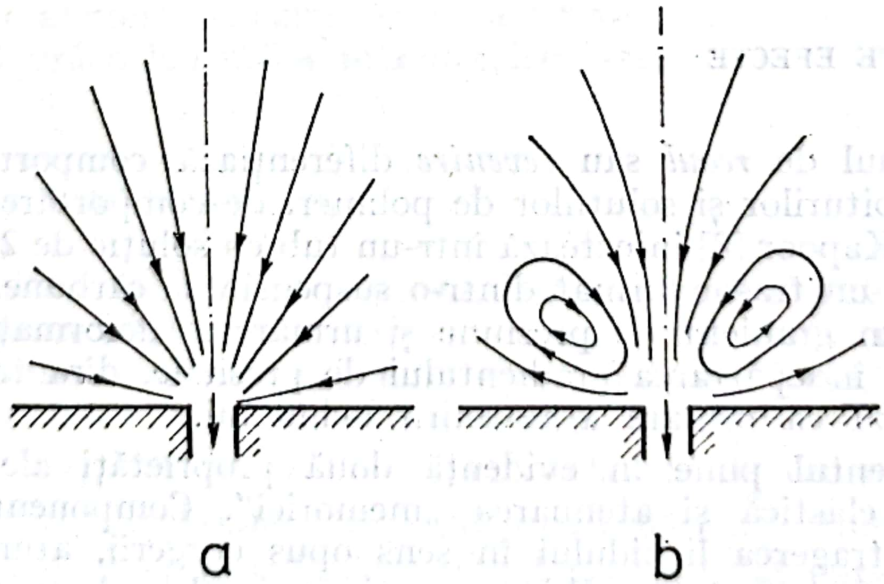


Fig. 5.7. Distribuția vitezelor la micșorarea bruscă a secțiunii de curgere:
a — lichid newtonian; *b* — lichid nenewtonian.

Scanned with OKEN Scanner

Un experiment făcut cu o soluție apoasă de 2% polietilen oxid a condus la un rezultat surprinzător. Se înclină paharul în care s-a introdus soluția, pînă ce începe să curgă sub forma unui filament (fig. 5.8, *b*). În continuare, poziția paharului rămîne nemodificată, iar lichidul *continuă să sifoneze*. Se obține sifonul „fără tub". Astfel, se poate transvaza pînă la aproximativ trei pătrimi din lichid [8]. Experiența pune în evidență o proprietate a unor soluții de polimeri, cunoscută sub denumirea de filabilitate. Ea prezintă importanță pentru industria fibrelor sintetice.

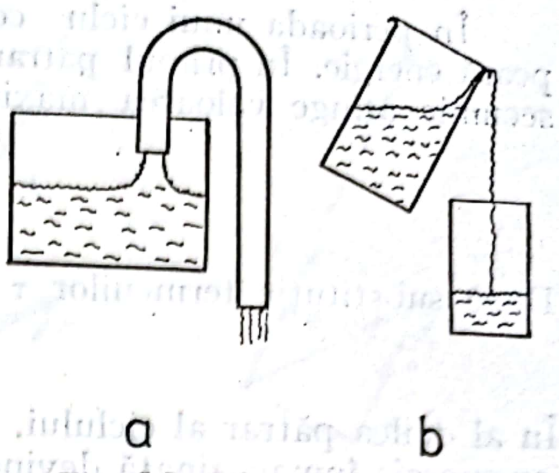


Fig. 5.8. Sifonul „fără tub".

5.3. SOLICITĂRI PERIODICE

Răspunsul corpurilor la solicitări ce variază periodic furnizează informații importante asupra proprietăților reologice. Studiul comportării la solicitări periodice prezintă interes, în special la corpurie vîscoelastice solide sau lichide. Pe această cale se pot determina coeficienți de material ce afectează ecuațiile reologice.

Corpul perfect elastic definit de ecuațiile (2.20) se caracterizează prin faptul că răspunsul la solicitări este instantaneu. Supus la forfecare simplă periodică prezintă deformații variabile în timp.

$$\gamma = \gamma_0 \sin(\omega t) \tag{5.21}$$

în care γ_0 este deformația maximă, iar $\omega = 2\pi f$, unde f este frecvența deformațiilor exprimate în cicluri pe secundă. Ecuația reologică a solidului Hooke [v. ec. (2.24)], supus la forfecare simplă periodică, va fi

$$\tau = G\gamma_0 \sin(\omega t) \tag{5.22}$$

Din ultimele două ecuații rezultă că între variația în timp a deformației și a tensiunii nu există defazaj.

Scanned with OKEN Scanner

În perioada unui ciclu complet, egală cu $1/f$ secunde, nu se disipează energie. În primul pătrar al ciclului deformația crește și la $1/4\,f$ secunde atinge valoarea maximă. Energia înmagazinată este dată de

$$E = \int_0^{1/4f} \tau\dot{\gamma}\, dt \tag{5.23}$$

După substituția termenilor τ și $\dot{\gamma}$ și integrare, rezultă

$$E = G\gamma_0^2/2 \tag{5.24}$$

În al doilea pătrar al ciclului, deformația este recuperată în întregime, iar energia înmagazinată devine egală cu zero. A doua jumătate a ciclului este identică cu prima, numai că deformația este negativă.

Un fluid newtonian supus la forfecare periodică sinusoidală, conform ecuației (5,21), se va deforma cu o viteză

$$\dot{\gamma} = \dot{\gamma}_0\omega \cos(\omega t) \tag{5.25}$$

iar ecuația reologică [v. ec. (2.11)] devine

$$\tau = \eta\dot{\gamma}_0\omega \cos(\omega t) \tag{5.26}$$

Din compararea ecuațiilor (5.21), (5.25) și (5.26) rezultă că în cazul lichidului newtonian, între deformații și tensiune există un defazaj de 90°, iar între viteza de deformare și tensiune nu există defazaj.

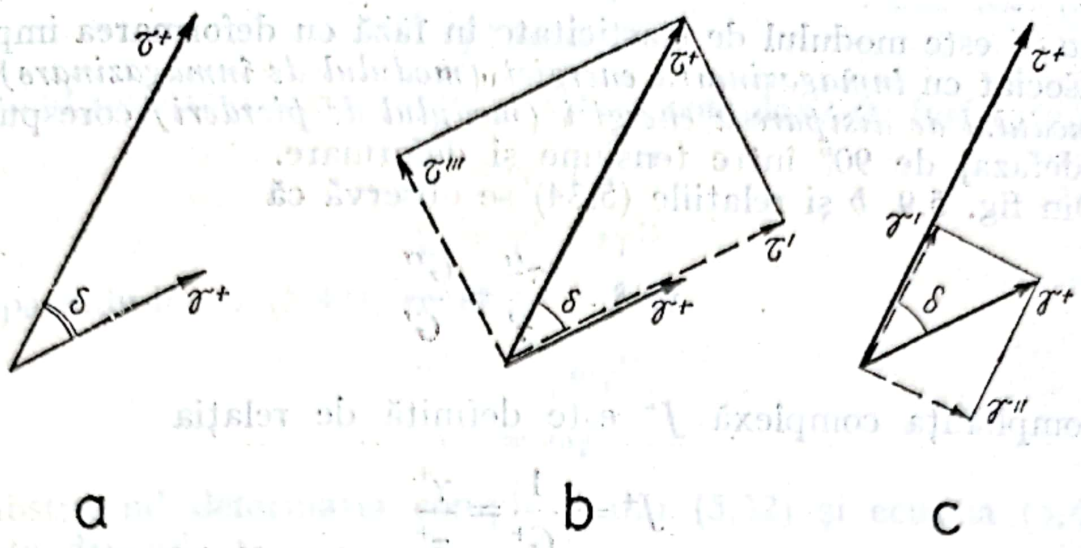
Energia disipată în primul sfert al ciclului de solicitare este

$$E = \int_0^{1/4f} \tau\dot{\gamma}\, dt = \eta\gamma_0^2\omega^2 \int_0^{1/4f} \cos^2(\omega t)\, dt = \frac{\pi}{4}\eta\omega\gamma_0^2 \tag{5.27}$$

Același rezultat se obține și pentru celelalte părți ale ciclului, încît energia totală disipată într-un ciclu complet, va fi

$$E = \pi\eta\omega\gamma_0^2 \tag{5.28}$$

Un corp vîscoelastic solid căruia i se impune o deformare, ce este o funcție sinusoidală de timp, va prezenta între tensiunea de forfecare și deformație un defazaj δ cuprins între 0 și 90°. Analiza comportării unor astfel de corpuri este ușurată prin introducerea unor mărimi complexe reprezentate ca vectori în planul complex. De exemplu τ^+ și γ^+, a căror mărime reprezintă valorile maxime ale tensiunii și deformației, iar intersecția lor în origine formează unghiul de defazaj δ (fig. 5.9, *a*). Proiecția mărimilor complexe pe axele de coordonate reprezintă *componenta reală*, τ' și γ', și *componenta imaginară*, τ'' și γ''. Orientarea axelor de referință este arbitrară și convențional s-au luat în așa fel încît



a b c

Fig. 5.9. Vectorii tensiune și deformație în planul complex.

coincid cu γ^+ (fig. 5.9, *b*) sau cu τ^+ (fig. 5.9, *c*). În primul caz, de exemplu, γ^+ are numai o componentă reală γ', iar τ^+ are componenta reală τ' și componenta imaginară τ''.

Mărimile complexe se descompun într-o componentă reală și una imaginară:

— tensiunea $\tau^+ = \tau' + i\tau''$ (5.29)

— modulul de elasticitate $G^+ = G' + iG''$ (5.30)

— complianța $J^+ = J' - iJ'' = \dfrac{1}{G^+}$ (5.31)

Modulul de forfecare complex se definește astfel:

$$G^+ = \frac{\tau^+}{\gamma^+} = G' + iG'' \tag{5.32}$$

și după substituția mărimii τ^+ din (5.29) se obține

$$G^+ = \frac{\tau' + i\tau''}{\gamma'} = \frac{\tau'}{\gamma'} + i\frac{\tau''}{\gamma'} \tag{5.33}$$

deoarece γ^+ are numai componenta reală γ'. Comparînd ecuațiile (5.32) cu (5.30) se constată că

$$G' = \frac{\tau'}{\gamma'} \text{ și } G'' = \frac{\tau''}{\gamma'} \tag{5.34}$$

Scanned with OKEN Scanner

în care G' este modulul de elasticitate în fază cu deformarea impusă și este asociat cu *înmagazinarea energiei (modulul de înmagazinare)* și G'' este *modulul de disipare a energiei (modulul de pierderi)* corespunzător unui defazaj de 90° între tensiune și deformare.

Din fig. 5.9, *b* și relațiile (5.34) se observă că

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{\tau''}{\tau'} = \frac{G''}{G'} \tag{5.36}$$

Complianța complexă J^+ este definită de relația

$$J^+ = \frac{1}{G^+} = \frac{\gamma^+}{\tau^+} \tag{5.36}$$

din care rezultă

$$J' = \frac{G'}{(G')^2 + (G'')^2}$$

$$J'' = \frac{G''}{(G')^2 + (G'')^2} \tag{5.37}$$

și mai departe

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{J''}{J'} \tag{5.38}$$

În mod similar se definește *vîscozitatea complexă* a corpurilor vîsco-elastice

$$\eta^+ = \frac{\tau^+}{\dot{\gamma}^+} = \eta' - i\eta'' \tag{5.39}$$

în care $\dot{\gamma}^+$ este viteza complexă de forfecare sau derivata deformației complexe γ^+ în raport cu timpul. Între viteza complexă de forfecare $\dot{\gamma}^+$ și deformația complexă de forfecare γ^+, în cazul unei solicitări sinusoidale, se poate stabili o corelație

$$\gamma^+ = \gamma_0 [\cos(\omega t) + i \sin(\omega t)] \tag{5.40}$$

care este expresia deformației complexe, iar γ_0 reprezintă mărimea lui γ^+. Viteza de forfecare va fi

$$\dot{\gamma}^+ = \omega\gamma_0 \left[\cos\left(\frac{\pi}{2} + \omega t\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{2} + \omega t\right)\right] \tag{5.41}$$

Scanned with OKEN Scanner

Din ultimele două relații, se obține

$$\dot{\gamma}^{+} = i\omega\gamma^{+} \tag{5.42}$$

Defininind deformația complexă și viteza complexă de forfecare

$$\gamma^{+} = \gamma' + i\gamma'' \tag{5.43}$$

$$\dot{\gamma} = \dot{\gamma}' + i\dot{\gamma}'' \tag{5.44}$$

și comparîndu-le cu (5.42), rezultă

$$\dot{\gamma}' = -\omega\gamma'' \tag{5.45}$$

$$\dot{\gamma}'' = \omega\gamma' \tag{5.46}$$

Substituind deformația complexă din (5.32) și ecuația (5.42), se stabilește dependența

$$G^{+} = i\omega\frac{\tau^{+}}{\dot{\gamma}^{+}} \tag{5.47}$$

pe baza căreia se stabilesc corelații între modulul complex de forfecare și vîscozitatea complexă:

$$G^{+} = i\omega\eta^{+} \tag{5.48}$$

Mai departe se deduc dependențele

$$G' = \omega\eta'' = \omega\frac{\tau'}{\dot{\gamma}''} \tag{5.49}$$

$$G'' = \omega\eta' = \omega\frac{\tau''}{\dot{\gamma}''} \tag{5.50}$$

precum și

$$\operatorname{tg}\delta = \frac{G''}{G'} = \frac{\eta'}{\eta''} \tag{5.51}$$

Într-un material vîscoelastic, viteza instantanee de disipare a energiei pe unitate de volum, este dată de

$$\frac{dE}{dt} = \tau''(t)\,\dot{\gamma}''(t) \tag{5.52}$$

în care $\tau''(t)$ reprezintă valoarea instantanee a componentei imaginare a mărimii complexe τ^{+}, iar $\dot{\gamma}''(t)$ este valoarea instantanee a derivatei

Scanned with OKEN Scanner

mărimii complexe γ^+ în raport cu timpul. Pe baza relațiilor (5.34), (5.45) și (5.46), din ultima ecuație se obține

$$\frac{dE}{dt} = \omega G'' [\gamma'(t)]^2 \tag{5.53}$$

și energia totală disipată în timpul unui ciclu este dată de

$$E = \omega G'' \int_0^{1/f} [\gamma^I(t)]^2 \, dt \tag{5.54}$$

Partea reală a deformației instantanee rezultă din (5.21)

$$\gamma^I(t) = \gamma_0 \sin (2\pi f t) \tag{5.55}$$

și după substituție în (5.54) și integrare, se obține

$$E = \pi G'' \gamma_0^2 \tag{5.56}$$

Energia disipată poate fi exprimată și funcție de partea reală a vîscozității complexe, prin intermediul ecuației (5.50)

$$E = \pi \omega \eta' \gamma_0^2 .$$

Proprietățile vîscoelastice ale corpurilor sînt dependente de temperatură și frecvență. Cînd ecuația reologică este cunoscută, dependența proprietăților vîscoelastice de frecvență poate fi determinată.

5.4. ECUAȚII REOLOGICE SAU CONSTITUTIVE

Exprimarea comportării reologice a corpurilor vîscoelastice se face cu ajutorul unor ecuații care reprezintă dependența între parametrii solicitării (tensiuni, deformații, viteze de deformare etc.). Ele conțin unul sau mai mulți parametri de material. Valabilitatea lor este limitată la regimul de curgere laminar, în condiții izoterme.

Scanned with OKEN Scanner

Ecuațiile reologice se deduc pe baza modelelor analoge (mecanice, electrice etc.), analitic pe baza unui model fizic al structurii, prin modelarea empirică a datelor experimentale sau prin extinderea unor ecuații existente.

5.4.1. MODELE ANALOGE MECANICE

Modelele mecanice cele mai simple ce descriu comportarea vîsco-elastică se obțin prin legarea în serie sau în paralel a unui arc cu un amortizor. Astfel se obține lichidul Maxwell și respectiv solidul Voigt-Kelvin.

5.4.1.1. Corpul Maxwell

Modelul mecanic al lichidului Maxwell este format dintr-un arc înseriat cu un amortizor (v. fig. 3.6). Deformația totală este suma deformațiilor elementelor mecanice

$$\gamma = \gamma_e + \gamma_v \tag{5.57}$$

La forfecare simplă, deformația elastică γ_e și deformația vîscoasă γ_v, rezultă din

$$\tau_{yx} = -G\frac{\mathrm{d}X_x}{\mathrm{d}y} \equiv -G\gamma_{yx}(t_0, t) \tag{5.58}$$

$$\tau_{yx} = -\eta\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}y} \equiv -\eta\dot{\gamma}_{yx(t)} \tag{5.59}$$

în care v_x este viteza fluidului în direcția x, X_x — deplasarea în aceeași direcție, din poziția de echilibru corespunzătoare timpului t_0. După derivarea primelor ecuații în raport cu timpul și substituția vitezelor de deformare, rezultă

$$\tau_{yx} + \frac{\eta}{G}\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial t} = -\eta\dot{\gamma}_{yx} \tag{5.60}$$

ecuația reologică a lichidului Maxwell, bazată pe ipoteza simplă a îmbinării proprietăților de elasicitate și vîscozitate. Pentru forfecare în regim staționar, ecuația se reduce la expresia fluidului Newton. La modi-

Scanned with OKEN Scanner

ficarea rapidă a tensiunii, termenul al doilea din partea stîngă a ecuației (5.60) devine predominant și prin integrare se obține ecuația solidului Hooke.

Raportul $(\eta/G) = t_r$ reprezintă timpul de relaxate, respectiv timpul necesar ca efortul unitar să scadă cu 63,2% din valoarea inițială. Mai general, raportul reprezintă o constantă de timp.

Ecuația (5.60) se poate transcrie într-o formă evoluată prin substituția componentelor forfecării; cu componentele arbitrare ale tensorilor tensiunii și vitezei de forfecare

$$\tau_{ij} + t_r \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial t} = -\eta \dot{\gamma}_{ij} \tag{5.61}$$

în care η este o vîscozitate oarecare. Aceast ecuație se mai poate pune în două forme integrale [8]:

$$\tau_{ij}(t) = -\int_{-\infty}^{t} \left[\frac{\eta}{t_r} e^{-(t-t')/t_r}\right] \dot{\gamma}_{ij}(t') \, dt' \tag{5.62}$$

$$\tau_{ij}(t) = \int_{-\infty}^{t} \left[\frac{\eta}{t_r^2} e^{-(t-t')/t_r}\right] \gamma_{ij}(t') \, dt' \tag{5.63}$$

În (5.62) termenul din paranteză reprezintă funcția de relaxare [v. ec. (3.12)]. Ecuația precizează că tensiunea la timpul actual t depinde de viteza de deformare la timpul t și de viteza de deformare la toate timpurile trecute t', amplificate cu un factor reprezentat de funcția de relaxare care scade exponențial, dacă ne întoarcem în timp. Rezultă că lichidul Maxwell are o memorie descrescătoare, reține foarte bine solicitările recente și, numai într-o foarte mică măsură, pe cele mai îndepărtate.

Ecuația (5.63) rezultă la integrarea prin părți a ecuației (5.62), luîndu-se ca stare de referință pentru γ_{ij} starea la timpul $t' = t$; deci deformația este raportată la configurația corpului din timpul prezent. Termenul din paranteză reprezintă *funcția de memorie*.

Se consideră corpul Maxwell supus la solicitări periodice de forfecare simplă. Dacă se cunoaște ecuația reologică se pot deduce relații de dependență între proprietățile vîscoelastice și frecvență.

În ecuația (5.61) se introduce deformația periodică, dată de (5.21) și după rezolvare, se obține

$$\tau = k_1 e^{-t/t_r} + \frac{G\gamma_0 \omega t_r}{1 + \omega^2 t_r^2} [\omega t_r \sin(\omega t) + \cos(\omega t)] \tag{5.64}$$

Scanned with OKEN Scanner

în care k_1 este o constantă de integrare. Primul termen al ecuației devine neglijabil pentru valori mari ale lui t și τ devine o funcție pur periodică

$$\tau = \frac{G\gamma_0\omega t_r}{1+\omega^2 t_r^2}[\omega t_r \sin(\omega t) + \cos(\omega t)] \tag{5.65}$$

Considerînd că deformația are numai o componentă reală

$$\gamma'(t) = \gamma_0 \sin(\omega t)$$

rezultă $\gamma^* = \gamma_0$, iar partea din tensiune în fază cu deformația, va fi

$$\tau'(t) = \frac{G\gamma_0\omega^2 t_r^2}{1+\omega t_r^2}\sin(\omega t)$$

sau mai departe

$$\tau' = \frac{G\gamma_0\omega^2 t_r^2}{1+\omega^2 t_r^2} \tag{5.66}$$

În mod identic se obține din (5.65) și componenta imaginară

$$\tau'' = \frac{G\gamma_0\omega t_r}{1+\omega^2 t_r^2} \tag{5.67}$$

Din relațiile de definiție a modulilor de elasticitate [v. ec. (5.34)], se constată că

$$G' = \frac{G\omega^2 t_r^2}{1+\omega^2 t_r^2} \tag{5.68}$$

$$G'' = \frac{G\omega t_r}{1+\omega^2 t_r^2} \tag{5.69}$$

Modulul de elasticitate de înmagazinare G' și modulul de elasticitate de pierderi G'' sînt dependenți de frecvență (fig. 5.10). Pentru $\omega t_r = 1$ raportul G''/G are valoare maximă și devine foarte mic la frecvențe foarte mari sau foarte mici. Partea reală a modulului de forfecare crește continuu cu frecvența solicitărilor.

Scanned with OKEN Scanner

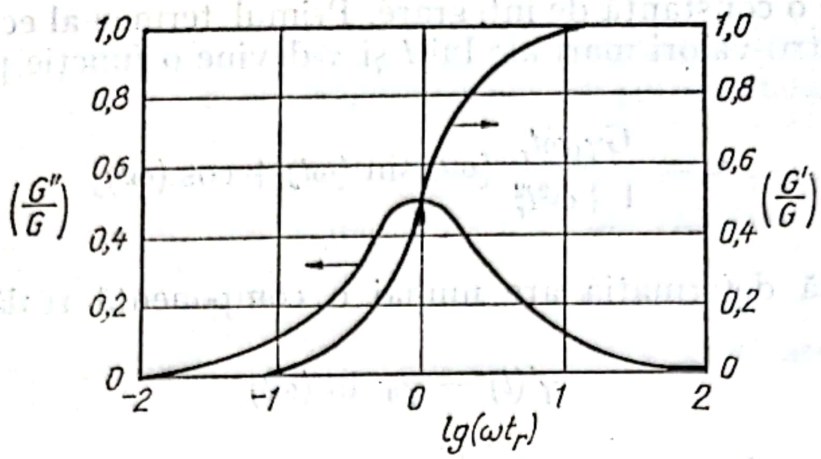


Fig. 5.10. Dependența de frecvență a proprietăților lichidului Maxwell.

Comportarea reologică a unor corpuri vîscoelastice reale și dependențe proprietăților de frecvență este mai complexă decît cea rezultată pe baza modelului simplu. Modelul Maxwell generalizat conduce la relații cu un spectru de utilitate mult mai larg.

Se consideră, în prima etapă, un model format din două elemente (fig. 5.11,a). Tensiunea totală este suma tensiunilor ce acționează asupra elementelor

$$\tau = \tau_1 + \tau_2 \tag{5.70}$$

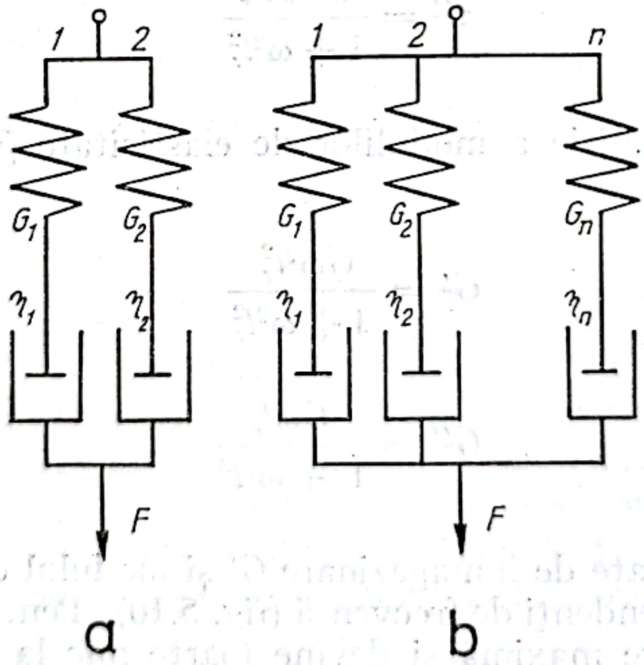


Fig. 5.11. Modele analogice cu mai multe elemente Maxwell.

în care, conform ecuației (5.57)

$$\tau_1 = -\left[t_{r1}\frac{d\tau_1}{dt} + \eta_1\frac{d\gamma}{dt}\right] \tag{5.71}$$

$$\tau_2 = -\left[t_{r2}\frac{d\tau_2}{dt} + \eta_2\frac{d\gamma}{dt}\right] \tag{5.72}$$

Prin combinarea ultimelor trei ecuații, rezultă (5.73)

$$\frac{d^2\tau}{dt^2} + (t_{r1}+t_{r2})\frac{d\tau}{dt} + (t_{r1}\cdot t_{r2})\tau = (G_1+G_2)\frac{d^2\gamma}{dt^2} + (G_1t_{r2}+G_2t_{r1})\frac{d\gamma}{dt} \tag{5.73}$$

care este identică cu (3.27) obținută pentru corpul Burgers.

Răspunsul corpului la solicitări periodice se obține dacă în ultima ecuație se introduce expresia deformației sinusoidale (5.21) și se rezolvă în raport cu τ. Din partea periodică a soluției se deduc modulii de elasticitate

$$G' = \frac{G_1t_{r1}^2\omega^2}{1+\omega^2t_{r1}^2} + \frac{G_2t_{r2}^2\omega^2}{1+\omega^2t_{r2}^2} \tag{5.74}$$

$$G'' = \frac{G_1t_{r1}\omega}{1+\omega^2t_{r1}^2} + \frac{G_2t_{r2}\omega}{1+\omega^2t_{r2}^2} \tag{5.75}$$

Pe baza relațiilor (5.49) și (5.50) se pot deduce expresiile componentei reale și a componentei imaginare a vîscozității complexe

$$\eta' = \frac{G_1t_{r1}}{1+\omega^2t_{r1}^2} + \frac{G_2t_{r2}}{1+\omega^2t_{r2}^2} \tag{5.76}$$

$$\eta'' = \frac{G_1t_{r1}^2\omega}{1+\omega^2t_{r1}^2} + \frac{G_2t_{r2}^2\omega}{1+\omega^2t_{r2}^2} \tag{5.77}$$

Modelul Maxwell generalizat (fig. 5.11, *b*) este format dintr-o infinitate de modele simple și va conține o infinitate de coeficienți de vîscozitate η_n și o infinitate de timpi de relaxare t_{rn}[63] Prin analogie cu ecua-

Scanned with OKEN Scanner

țiile (5.61)—(5.63), expresia modelului generalizat se poate scrie în următoarele forme

$$\tau_{ij,\,n} + t_{rn}\frac{\partial \tau_{ij,\,n}}{\partial t} = -\,\eta_n \dot{\gamma}_{ij}\,; \qquad \tau_{ij} = \sum_{n=1}^{\infty} \tau_{ij,\,n} \tag{5.78}$$

$$\tau_{ij} = -\int_{-\infty}^{t} \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\eta_n}{t_{rn}}\, \mathrm{e}^{-(t-t')/t_{rn}}\right] \dot{\gamma}_{ij}(t')\, \mathrm{d}t' \tag{5.79}$$

$$\tau_{ij} = +\int_{-\infty}^{t} \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\eta_n}{t_{rn}^2}\, \mathrm{e}^{-(t-t')/t_{rn}}\right] \gamma_{ij}(t')\, \mathrm{d}t' \tag{5.80}$$

în care t și t' au semnificațiile din ecuațiile (5.62) și (5.63).

Experimental s-a constatat că modelul Maxwell generalizat descrie foarte bine comportarea vîscoelastică a soluțiilor și topiturilor de polimeri. Valorile parametrilor ce afectează ecuațiile se determină pe baza teoriilor moleculare sau din datele experimentale. Numărul parametrilor se reduce la trei (η, t_{rn} și α) dacă sînt folosite următoarele relații empirice [39]

$$\eta_n = \frac{\eta t_{rn}}{\sum\limits_{n} t_{rn}} \text{ și } t_{rn} = \frac{t_r}{k^{\alpha}} \tag{5.81}$$

Pentru topituri și soluții concentrate de polimeri α variază între 2 și 4.

Partea reală G' și partea imaginară G'' a modulului complex de elasticitate, pentru modelul Maxwell generalizat, se obține din comparația ecuațiilor (5.68) și (5.69) cu (5.74) și (5.75), în ipoteza solicitărilor periodice

$$G' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{G_n t_{rn}^2 \omega^2}{1 + \omega^2 t_{rn}^2} \tag{5.82}$$

$$G'' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{G_n t_{rn} \omega}{1 + \omega^2 t_{rn}^2} \tag{5.83}$$

Pe baza ecuațiilor (5.49) și (5.50) din ultimele două relații, se pot obține componentele vîscozității complexe

5.4.1.2. CORPUL VOIGT-KELVIN

Modelul mecanic rezultă prin legarea în paralel al unui arc cu un amortizor (fig. 3.7). El are proprietatea de elasticitate întîrziată și descrie procesul de fluaj și de fluaj invers. Întrucît menținerea unei

anumite deformații necesită o tensiune constantă, modelul nu poate descrie fenomenul de relaxare.

Ecuația reologică rezultă prin însumarea tensiunilor ce solicită elementele modelului. Pentru o componentă arbitrară τ_{ij} rezultă

$$\tau_{ij} = \eta \frac{d\gamma_{ij}}{dt} + G\gamma_{ij} \tag{5.84}$$

Prin integrare la $\tau = \tau_k = \text{ct.}$ și $\gamma = 0$ la $t = 0$, se obține

$$\gamma(t) = \frac{\tau_k}{G}\left(1 - e^{-\frac{G}{\eta}t}\right) \tag{5.85}$$

în care raportul $(\eta/G) = t_I$ reprezintă timpul de întîrziere. Ecuația descrie fenomenul de fluaj. Deformația maximă către care tinde corpul, în condiția unei tensiuni constante, este dată de

$$\gamma(\infty) = \lim_{t\to\infty} \gamma(t) = \frac{\tau_k}{G} \tag{5.86}$$

sau, la un timp egal cu cel de întîrziere t_I, din (5.85) se deduce

$$\gamma(t_I) = 0{,}632\,\frac{\tau_k}{G} \tag{5.87}$$

Descărcarea corpului la timpul $t = t_k$ determină fenomenul de fluaj invers și deformația scade de la valoarea γ_k la zero. Ecuația reologică (5.84) devine

$$\eta \frac{d\gamma}{dt} + G\gamma = 0 \tag{5.88}$$

și după integrare, cu condiția inițială $\gamma(t) = \gamma_k$ la $t = t_k$

$$\gamma(t) = \gamma_k \cdot e^{-t/t_I} \tag{5.89}$$

se obține expresia curbei de fluaj invers.

Modelul Voigt-Kelvin generalizat este format din n elemente înseriate, ca în fig. 5.12. Elementul i din serie va avea modulul de elasticitate

Scanned with OKEN Scanner

Fig. 5.12. Modelul Voigt-Kelvin generalizat

G_i sau complianța J_{Gi}, vîscozitatea η_i și timpul de întîrziere $t_{Ii} = (\eta_i/G_i)$. Ecuația corespunzătoare va fi

$$\tau(t) = G_i\gamma_i(t) + \eta_i \frac{d\gamma_i(t)}{dt} \tag{5.90}$$

Deformația totală este suma deformațiilor elementelor

$$\gamma(t) = \sum_{i=1}^{n} \gamma_i(t) \tag{5.91}$$

Într-o experiență de fluaj, solicitarea τ_k este aplicată instantaneu la timpul zero și menținută constantă. Răspunsul unui element al modelului este dependent de timp

$$\gamma_i(t) = \frac{\tau_k}{G_i}[1 - e^{-t/t_{Ii}}] \tag{5.92}$$

sau pentru întregul model format din n elemente

$$\gamma(t) = \tau_k \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{G_i}[1 - e^{-t/t_{Ii}}] \tag{5.93}$$

Ultima ecuație se mai poate scrie funcție de complianță

$$\gamma(t) = \tau_k \sum_{i=1}^{n} J_i [1 - e^{-t/t_{Ii}}] \tag{5.94}$$

La limită, cînd $n \to \infty$, modelul va fi format dintr-o infinitate de elemente și se obține un spectru continuu al timpilor de întîrziere. Spectrul discret corespunzător unui număr de n elemente este înlocuit cu spectrul continuu. Fiecărei complianțe J_i din ecuația (5.94) îi corespunde un timp de întîrziere t_{Ii}. Se definește prin $J(t_I)\,dt_I$ un ansamblu de complianțe pentru care timpii de întîrziere sînt cuprinși între t_I și $t_I + dt_I$. *Spectrul de întîrziere* este dat de dependența $J(t_I)$ funcție de t_I.

În ipoteza unui spectru continuu al timpilor de întîrziere corespunzător unei infinități de elemente Voigt-Kelvin, ecuația (5.94) devine

$$\gamma(t) = \tau_k \int_0^{\infty} J(t_I)[1 - e^{-t/t_I}]\,dt_I \tag{5.95}$$

Modelul mecanic din figura 5.12 descrie comportarea elastică întîrziată. Dacă se asociază modelului un arc liber cu un modul de elasticitate G_0

și un amortizor, de vîscozitate η_∞, acesta va descrie o comportare reologică complexă. Ecuația (5.94) devine

$$\gamma(t) = \frac{\tau_k}{G_0} + \tau_k \sum_{i=1}^{n} J_i \left[1 - e^{-t/t_{Ii}}\right] + \frac{\tau_k}{\eta_\infty} t \qquad (5.96)$$

Se remarcă prezența componentei elastice instantanee dată de primul termen și a unei componente vîscoase, nerecuperabile, corespunzătoare ultimului termen.

La solicitări periodice, componentele complicanței complexe [v.ec. (5.31)], în termenii modelului Voigt-Kelvin generalizat, au formele [1]

$$J' = \sum_{i=1}^{n} \frac{J_i}{1 + \omega^2 t_{Ii}^2} \qquad (5.97)$$

$$J'' = \sum_{i=1}^{n} \frac{J_i \omega t_{Ii}}{1 + \omega^2 t_{Ii}^2} \qquad (5.98)$$

La toate modelele discutate efectele inerțiale au fost neglijate. Aceasta este justificat în cazul solicitărilor statice cînd nu apar variații de viteză. La aplicarea instantanee a unei solicitări, corpurile cu elasticitate instantanee prezintă deformații ce oscilează între anumite limite.

În cazul cel mai simplu, al modelului Hooke, pentru a pune în evidență efectul inerției, se ia în considerație masa m, (fig. 5.13, c). Cînd se aplică o forță instantanee F, deformația nu va lua imediat valoarea de echilibru $\gamma = \tau/G$, ci va oscila între zero și 2γ (fig. 5.13, a). Forțele interne — de natura vîscozității — amortizează oscilațiile și deformația tinde către valoarea de echilibru γ (fig. 5.13, b).

Ecuația corpului Hooke cu inerție va conține un termen în plus

$$\tau_{ij} = m \frac{d^2\gamma_{ij}}{dt^2} + G\gamma_{ij} \qquad (5.99)$$

în care m este masa corpului.

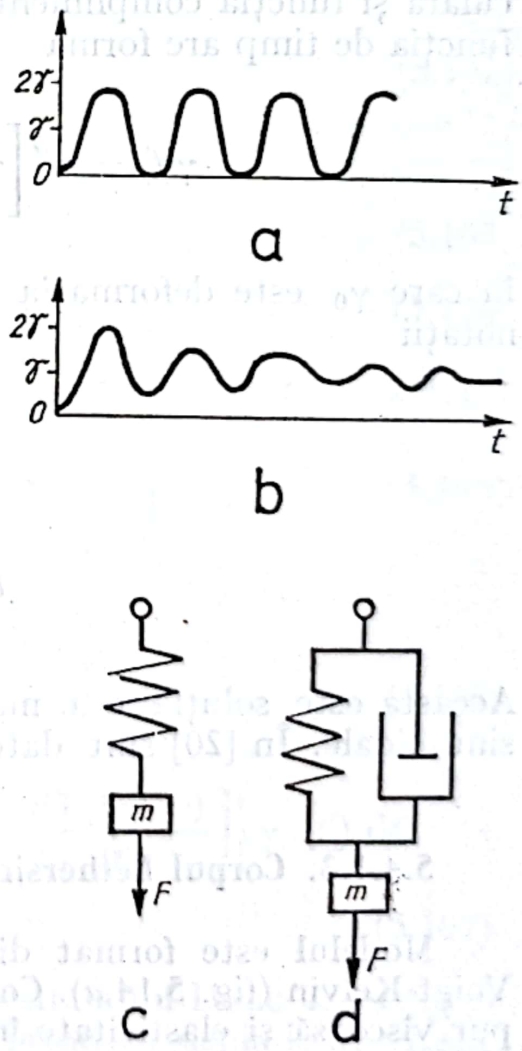


Fig. 5.13. Modele cu inerție.

Se consideră o masă m adăugată la modelul Voigt-Kelvin (fig.5.13,*d*). Ecuația reologică [v. ec. (5.84)] va conține termenul suplimentar ce ia în considerație forța inerțială.

$$\tau_{ij} = m\frac{d^2\gamma_{ij}}{dt^2} + \eta\frac{d\gamma_{ij}}{dt} + G\gamma_{ij} \qquad (5.100)$$

În acest caz, pentru o componentă vîscoasă suficient de pronunțată, modelul ajunge la deformația de echilibru suficient de repede și forța de inerție poate fi neglijată.

Aplicarea unei solicitări sub formă de impact sau la solicitări periodice (ciclice), efectul inerției nu mai poate fi neglijat. Aceasta depinde de proprietățile vîscoelastice ale corpului, între care timpul de relaxare are o deosebită importanță.

Soluția generală a ecuației (5.100) este suma între integrala particulară și funcția complimentară pentru $\tau = 0$[20]. Expresia deformației funcția de timp are forma

$$\gamma(t) = e^{at}\left[\gamma_0 \cos bt + \frac{\dot{\gamma} - a\gamma_0}{b}\sin bt\right] \qquad (5.101)$$

în care γ_0 este deformația la timpul zero, $\dot{\gamma} = d\gamma/dt$, iar a și b sînt notații

$$a = -\frac{\eta}{2m}$$

$$b = \frac{\sqrt{4Gm - \eta^2}}{2m}$$

Aceasta este soluția cea mai interesantă, deoarece descrie oscilațiile sinusoidale. În [20] sînt date și alte cazuri.

5.4.1.3. Corpul Lethersich

Modelul este format dintr-un amortizor înseriat cu un element Voigt-Kelvin (fig. 5.14,*a*). Corpul, conform modelului, manifestă curgere pur vîscoasă și elasticitate întîrziată. El descrie comportarea unor suspensii și emulsii, a unor soluții de polimeri și a bitumurilor.

Scanned with OKEN Scanner

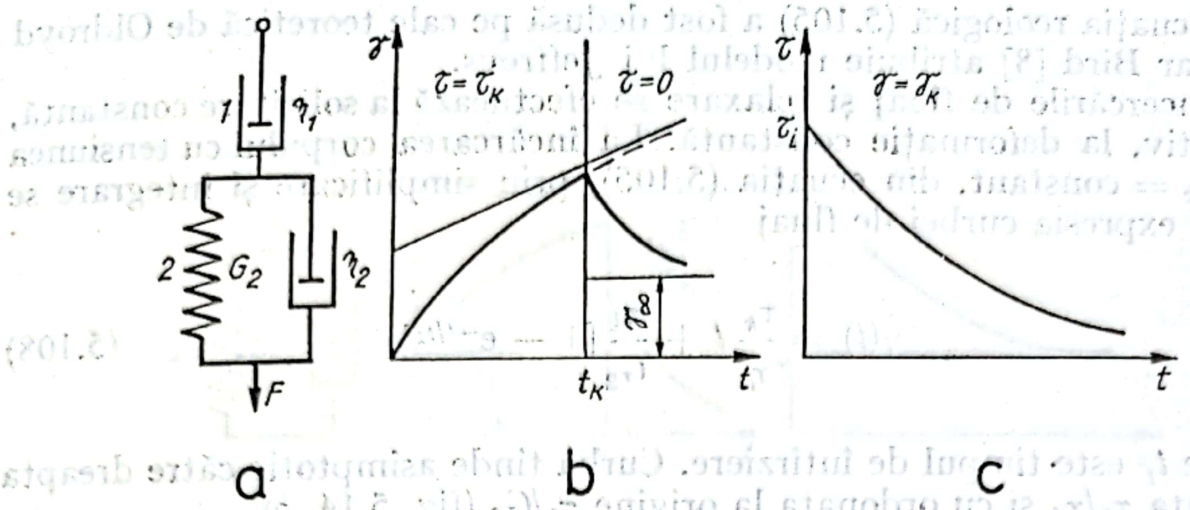


Fig. 5.14. Modelul Lethersich.

Deformația totală la forfecare simplă este suma deformațiilor elementelor

$$\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 \tag{5.102}$$

în care deformațiile parțiale rezultă din

$$\tau = \eta_1 \dot{\gamma}_1 \tag{5.103}$$

$$\tau = \eta_2 \dot{\gamma}_2 + G\gamma_2 \tag{5.104}$$

Din ultimele trei ecuații se obține pentru o componentă arbitrară τ_{ij}:

$$\tau_{ij} + t_r \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial t} = -\eta \left(\dot{\gamma}_{ij} + t_I \frac{\partial \dot{\gamma}_{ij}}{\partial t} \right) \tag{5.105}$$

ce poate fi transcrisă în două forme integrale [8]

$$\tau_{ij} = -\int_{-\infty}^{t} \left\{ \frac{\eta}{t_r} \left[\left(1 - \frac{t_I}{t_r} \right) e^{-(t-t')/t_r} + 2t_I \, \delta(t-t') \right] \right\} \dot{\gamma}(t') \mathrm{d}t' \tag{5.106}$$

$$\tau_{ij} = +\int_{-\infty}^{t} \left\{ \frac{\eta}{t_r^2} \left[\left(1 - \frac{t_I}{t_r} \right) e^{-(t-t')/t_r} + 2t_I t_r \frac{\mathrm{d}\delta(t-t')}{\mathrm{d}t'} \right] \right\} \gamma_{ij}(t') \, \mathrm{d}t'. \tag{5.107}$$

În ultimele ecuații $\delta(t-t')$ este funcția delta a lui Dirac $t_r = (\eta_1 + \eta_2)/G_1$ și $t_I = \eta_2/G_1$. Tensiunea la timpul prezent t depinde de viteza de deformare la timpul t și de viteza de deformare la timpii anteriori t'.

Scanned with OKEN Scanner

Ecuația reologică (5.105) a fost dedusă pe cale teoretică de Oldroyd [19], iar Bird [8] atribuie modelul lui Jeffreys.

Încercările de fluaj și relaxare se efectuează la solicitare constantă, respectiv, la deformație constantă. La încărcarea corpului cu tensiunea $\tau = \tau_k = \text{constant}$, din ecuația (5.105), prin simplificare și integrare se obține expresia curbei de fluaj

$$\gamma(t) = \frac{\tau_k}{\eta_1} t + \frac{\tau_k}{G_2} [1 - e^{-t/t_I}] \tag{5.108}$$

în care t_I este timpul de întîrziere. Curba tinde asimptotic către dreapta cu panta τ_k/η_1 și cu ordonata la origine τ_k/G_2 (fig. 5.14, *b*).

Funcția de fluaj se obține din (5.104) prin împărțire la γ_k

$$\mathcal{F}(t) = \frac{t}{\eta_1} + \frac{1}{G_2} [1 - e^{-t/t_I}] \tag{5.109}$$

Ea reprezintă deformația corespunzătoare unei solicitări unitare.

După îndepărtarea tensiunii, la $t = t_k$, are loc fluajul invers și deformația scade tinzînd asimptotic către valoarea limită corespunzătoare componentei vîscoase $\gamma_\infty = (\tau_k/\eta_1)\, t_k$.

Ecuația curbei de relaxare a solicitării rezultă din (5.105) cu condiția $\gamma = \gamma_k = \text{constant}$ și $\tau = \tau_i$ la $t = 0$.

Derivatele deformației în raport cu timpul se anulează și după integrare, se obține

$$\tau(t) = \tau_i \cdot e^{-t/t_r} \tag{5.110}$$

Rezultă că, în timp, tensiunea tinde asimptotic către valoarea zero.

Din ultima ecuație se obține funcția de relaxare

$$\mathcal{R}(t) = \frac{\tau_i}{\gamma_k} e^{-t/t_r} \tag{5.111}$$

ceea ce reprezintă diminuarea tensiunii la o deformație unitară.

5.4.1.4. Corpul Zener

Modelul se compune dintr-un resort înseriat cu un element Voigt-Kelvin (fig. 5.15, *a*). Proprietatea de elasticitate instantanee și de elasticitate întîrziată îl situează în categoria corpurilor solide. Din acest

Scanned with OKEN Scanner

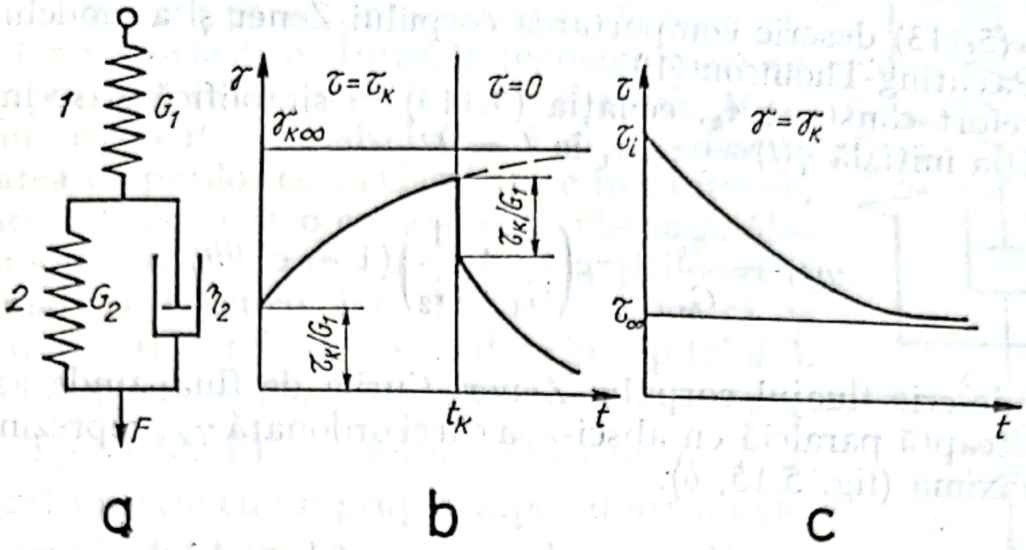


Fig. 5.15. Modelul Zener.

considerent a fost utilizat la descrierea comportării reologice a fibrelor de sticlă și a unor metale.

La încărcarea corpului apare, în primul rînd, o deformație instantanee γ_1, urmată de o deformație elastică întîrziată γ_2. Deformația totală este suma deformațiilor elementelor

$$\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$$

a căror expresie rezultă din ecuațiile reologice la forfecare simplă

$$\tau = G_1\gamma_1$$

$$\tau = \eta_2\dot{\gamma}_2 + G_2\gamma_2$$

Din grupul relațiilor scrise se obține pentru tensiunea arbitrară τ_{ij}

$$\frac{G_1+G_2}{\eta_2}\tau_{ij} + \frac{\partial\tau_{ij}}{\partial t} = G_1\left(\frac{G_2}{\eta_2}\gamma_{ij} + \dot{\gamma}_{ij}\right) \qquad (5.112)$$

ecuația de comportare reologică a corpului Zener.
Introducînd notațiile

$$t_r = \frac{\eta_2}{G_2}; \quad t_I = \frac{\eta_2}{G_1+G_2} \text{ și } K_G = \frac{G_1G_2}{G_1+G_2}$$

ecuația (5.108) se poate transcrie în altă formă

$$\tau_{ij} + t_r\frac{\partial\tau_{ij}}{\partial t} = K_G\left[\gamma_{ij} + t_I\dot{\gamma}_{ij}\right] \qquad (5.113)$$

Scanned with OKEN Scanner

Ecuația (5.113) descrie comportarea corpului Zener și a modelului echivalent Paynting-Thomson [19].

La efort constant τ_k, ecuația (5.113) se simplifică și se integrează cu condiția inițială $\gamma(t) = \tau_k/G_1$ la $t = 0$

$$\gamma(t) = \frac{\tau_k}{G_1} + \tau_k\left(\frac{1}{G_1} + \frac{1}{G_2}\right)(1 - e^{-t/t_1}) \tag{5.114}$$

Ecuația descrie fluajul corpului Zener. Curba de fluaj tinde asimptotic către o dreaptă paralelă cu abscisa, a cărei ordonată $\gamma_{k\infty}$ reprezintă deformația maximă (fig. 5.15, *b*).

$$\gamma_{k\infty} = \lim_{t\to\infty}\gamma(t) = \frac{\tau_k}{G_1} + \tau_k\left(\frac{1}{G_1} + \frac{1}{G_2}\right) \tag{5.115}$$

Fenomenul de relaxare se urmărește la deformația impusă $\gamma = \gamma_k = \text{constant}$ (fig. 5.15,*c*).
Cu condiția $\tau = \tau_i$ la $t = 0$ din ecuația (5.113) se obține

$$\tau(t) = K_G\gamma_k + (\tau_i - K_G\gamma_k)\, e^{-t/t_r} \tag{5.116}$$

expresia variației în timp a tensiunii.

După un timp foarte îndelungat, tensiunea scade pînă la o valoare minimă, dată de

$$\tau_\infty = \lim_{t\to\infty}\tau(t) = K_G\gamma_k = \frac{G_1G_2}{G_1+G_2}\gamma_k \tag{5.117}$$

Acesta este unul din corpurile la care tensiunea nu scade pînă la zero, ceea ce corespunde corpurilor reale.

Funcțiile de fluaj și relaxare se obțin din ecuațiile (5.114) și respectiv, (5.116)

$$\mathcal{F}(t) = \frac{1}{G_1} + \left(\frac{1}{G_1} + \frac{1}{G_2}\right)(1 - e^{-t/t_1}) \tag{5.118}$$

și

$$\mathcal{R}(t) = K_G + \left(\frac{\tau_i}{\gamma_k} - K_G\right)e^{-t/t_r} \tag{5.119}$$

Denumirea de model Zener este atribuită și grupării formate dintr-un arc în paralel cu un element Maxwell [43,50].

Scanned with OKEN Scanner

5.4.1.5. Modele mecanice cu mai multe elemente

Corpul Burgers posedă proprietățile de bază ale materialelor vîscoelastice. Întrucît modelul mecanic se obține prin legarea în serie a unui element Maxwell cu un element Voigt-Kelvin, el poate descrie comportarea corpurilor ce au elasticitate instantanee, elasticitate întîrziată și o componentă vîscoasă. Modelul reproduce comportarea reologică a polimerilor amorfi liniari și a betoanelor. Ecuația reologică și funcțiile de fluaj și relaxare sînt date în capitolul 3.

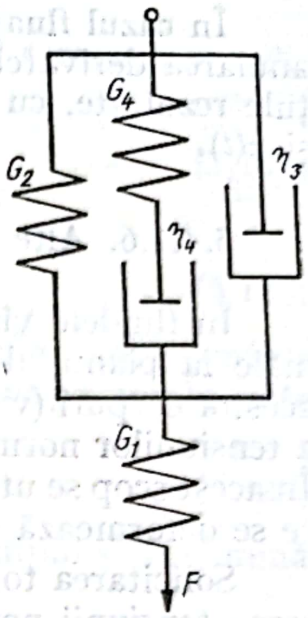


Fig. 5.16. Model cu cinci elemente.

Un model mecanic cu cinci elemente este prezentat în fig. 5.16. El este format dintr-un element Hooke legat în serie cu un grup compus dintr-un element Maxwell, în paralel cu un element Voigt-Kelvin. Modelul reproduce comportarea polimerilor în stare solidă [19].

Deformația totală este suma deformațiilor modelului Hooke γ_1 și a grupului γ_2

$$\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 \tag{5.120}$$

Pentru grup se scrie suma tensiunilor, deformația γ_2 fiind aceeași

$$\tau = \tau_2 + \tau_3 + \tau_4 \tag{5.121}$$

în care

$$\begin{aligned} \tau_2 &= G_2\gamma_2 \\ \tau_3 &= \eta_3\dot{\gamma}_2 \\ \tau_4 &= \eta_4\dot{\gamma}_2 - \frac{\eta_4}{G_4}\frac{\mathrm{d}\tau_4}{\mathrm{d}t} \end{aligned} \tag{5.122}$$

Din relațiile (5.120) — (5.122), după derivări și substituții, se obține ecuația reologică diferențială a modelului mecanic

$$\frac{\eta_3}{G_1G_4}\frac{\mathrm{d}^2\tau}{\mathrm{d}t^2} + \left(\frac{1}{G_1} + \frac{1}{G_4} + \frac{G_2}{G_1G_4} + \frac{\eta_3}{G_1\eta_4}\right)\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}t} + \left(\frac{1}{\eta_4} + \frac{G_2}{G_1\eta_4}\right)\tau = \\ = \frac{\eta_3}{G_4}\frac{\mathrm{d}^2\gamma}{\mathrm{d}t^2} + \left(1 + \frac{G_2}{G_4} + \frac{\eta_3}{\eta_4}\right)\frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t} + \frac{G_2}{\eta_4}\gamma \tag{5.123}$$

valabilă pentru solicitări la forfecare simplă.

Scanned with OKEN Scanner

În cazul fluajului sau al relaxării, ecuația (5.123) se simplifică prin anularea derivatelor tensiunii sau, respectiv, ale deformației. Din ecuațiile rezultate, cu ajutorul condițiilor inițiale, se pot obține funcțiile $\gamma(t)$ și $\tau(t)$.

5.4.1.6. Alte modele mecanice

În fluidele vîscoelastice, sub acțiunea solicitării, apar tensiuni normale la planul de forfecare, a căror consecință sînt efectele specifice acestor corpuri (v. § 5.2). Un model care redă sugestiv modul de generare a tensiunilor normale la direcția de forfecare este prezentat în fig. 5.17. În acest scop se utilizează un element Voigt-Kelvin și un element Maxwell ce se deformează în planuri perpendiculare.

Solicitarea totală servește atît pentru forfecare, cît și pentru generarea tensiunii normale.

$$\tau = \tau_1 + \tau_2 \tag{5.124}$$

în care

$$\tau_1 = G_1\gamma + \eta\dot{\gamma} \tag{5.125}$$

$$\tau_2 = \tau_M$$

După substituția ultimelor ecuații în (5.124) rezultă

$$\tau = G_1\gamma + \eta\dot{\gamma} + \tau_M \tag{5.126}$$

unde τ_M reprezintă partea din solicitarea totală ce servește la generarea tensiunilor normale.

Modelele mecanice ale corpurilor Maxwell, Voigt-Kelvin și celelalte descriu comportarea liniară. Reproducerea unei comportări neliniare se realizează pe baza acelorași modele, admițînd pentru fiecare element al modelului o ecuație neliniară.

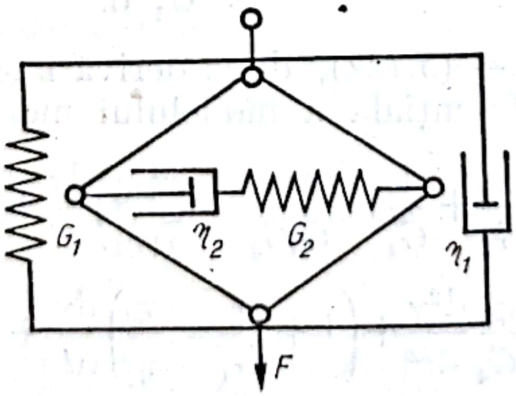


Fig. 5.17. Model mecanic cu tensiune normală la planul de forfecare.

Scanned with OKEN Scanner

De exemplu, se consideră că ecuația amortizorului cu comportare neliniară este dată de legea puterii [v. ec. (4.3)]

$$\tau = k\dot{\gamma}_1^n \tag{5.127}$$

Prin analogie se admite o ecuație a arcului, de forma

$$\tau = k_G \gamma_2^m \tag{5.128}$$

Prin legarea în serie a unui arc cu un amortizor (v. fig. 3.6), ambele neliniare, se obține un corp Maxwell neliniar. Deformația totală este suma

$$\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 \tag{5.129}$$

Ecuațiile (5.128) și (5.129) se derivează în raport cu timpul și se elimină prin substituție, vitezele de forfecare $\dot{\gamma}_1$ și $\dot{\gamma}_2$

$$\dot{\gamma} = \frac{1}{[mk_G}\left(\frac{\tau}{k_G}\right)^{\frac{1-m}{m}} \frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}t} + \left(\frac{\tau}{k}\right)^{\frac{1}{n}} \tag{5.130}$$

S-a obținut ecuația reologică a unui fluid vîscoelastic cu comportare neliniară. Mărimile, n, m, k și k_G sînt coeficienți de material. Valorile lor se determină experimental.

Prin legarea în paralel a unui element vîscos neliniar, cu un element elastic neliniar, rezultă corpul Voigt-Kelvin cu comportare neliniară (v. fig. 3.7). Solicitarea totală este suma solicitărilor

$$\tau = \tau_1 + \tau_2 \tag{5.131}$$

După substituția tensiunilor date de relațiile (5.127) și (5.128) ultima ecuație devine

$$\tau = k\dot{\gamma}^n + k_G \gamma^m \tag{5.132}$$

care este ecuația reologică a unui solid vîscoelastic. Ecuația poate descrie fenomenul de fluaj.

În mod similar pot fi stabilite ecuații reologice pentru corpuri vîscoelastice neliniare, pe baza unor modele mecanice, cu mai multe elemente.

5.4.1.7. Unele generalizări

Comportarea reologică a corpurilor vîscoelastice s-a descris cu ajutorul unor ecuații obținute pe baza modelelor analoge. Aceste ecuații sînt explicitate în tensiuni sau deformații, funcție de tipul

Scanned with OKEN Scanner

experimentului — fluaj sau relaxare. Dacă se analizează ecuațiile (5.61), (5.73), (5.78), (5.90), (5.100), (5.105), (5.112), (5.123) se poate intui o ecuație generală, din care, prin particularizare, se poate regăsi oricare din ele. Aceasta este *ecuația operațională* [2,24].

$$P\tau_{ij} = Q\gamma_{ij} \tag{5.133}$$

în care P și Q sînt operatori diferențiali liniari definiți de relațiile

$$P = p_0 + p_1 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} + p_2 \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} + \ldots + p_n \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n} \tag{5.134}$$

$$Q = q_0 + q_1 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} + q_2 \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} + \ldots + q_n \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n} \tag{5.135}$$

Coeficienții p_i și q_i caracterizează corpurile vîscoelastice și reprezintă combinații între vîscozități, moduli de elasticitate, timpi de relaxare și timpi de întîrziere.

O formă particulară a ecuației (5.133) sau *ecuația lui Frölich și Sack* se obține pentru [8]

$$p_0 = 1;\ p_1 = t_r;\ p_2 = p_3 = \ldots p_n = 0$$

$$q_0 = \eta;\ \ q_1 = \eta t_I;\ q_2 = q_3 = \ldots q_n = 0$$

Introducînd coeficienții în ecuația operațională (5.133) rezultă

$$\left(1 + t_r \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)\tau_{ij} = \eta\left(1 + t_I \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)\gamma_{ij} \tag{5.136}$$

unde t_r este timpul de relaxare, t_I timpul de întîrziere și η vîscozitatea dinamică.

Funcție de valorile coeficienților p_i și q_i, ecuația operațională poate fi particularizată. În tabelul 5.1 sînt trecute expresiile coeficienților pentru cinci corpuri, a căror ecuații au fost discutate în prezentul paragraf.

Ecuațiile unor corpuri descrise anterior au fost transcrise și sub formă integrală. Dacă se compară ecuația corpului Maxwell [v.ec.(5.62)], a corpului Maxwell generalizat [v.ec.(5.79)] și a corpului Lethersich

Scanned with OKEN Scanner

Tabelul 5.1

Valorile coeficienților p_i și q_i din ecuația operațională pentru cîteva corpuri*

Corpul	p_0	p_1	p_2	q_0	q_1	q_2	Numărul ecuației
Maxwell	1	t_r	0	0	η	0	(5.57)
Voigt-Kelvin	1	0	0	G	η	0	(5.80)
Lethersich.	1	t_r	0	0	η	$t_I\eta$	(5.101)
Zener	$\frac{G_1+G_2}{\eta_2}$	1	0	$\frac{G_1G_2}{\eta_2}$	1	0	(5.108)
	1	t_r	0	K_G	K_Gt_I	0	(5.109)
Cu 5 elemente (fig. 5.16)	$\frac{1}{\eta_4}+\frac{G_2}{G_1\eta_4}$	$\frac{1}{G_1}+\frac{1}{G_4}+\frac{G_2}{G_1G_4}+\frac{\eta_3}{G_1\eta_4}$	$\frac{\eta_3}{G_1G_4}$	$\frac{G_2}{\eta_4}$	$1+\frac{G_2}{G_4}+\frac{\eta_3}{\eta_4}$	$\frac{\eta_3}{G_4}$	(5.119)

* Coeficienții ce nu sînt trecuți în tabel sînt egali cu zero.

[v.ec.(5.106)] se constată că au aceeași formă. Fiecare reprezintă integrala pe un domeniu ce include toți timpii trecuți din produsul între funcția de relaxare și tensorul vitezei de deformare. Modelul general al corpului vîscoelastic liniar include aceste ecuații și se poate scrie în două forme echivalente

$$\tau = -\int_{-\infty}^{t} G(t-t')\dot{\gamma}(t')\,dt' \qquad (5.137)$$

$$\tau = +\int_{-\infty}^{t} M(t-t')\,\gamma(t')\,dt' \qquad (5.138)$$

în care $G(t-t')$ este *funcția de relaxare*, sau detaliat $G(t) = (\eta/t_r)\,e^{-t/t_r}$ și $M(t-t') = \dfrac{d[G(t-t')]}{dt'}$ este *funcția de memorie*.

Scanned with OKEN Scanner

Ecuația (5.137) se poate obține prin simplificarea unei relații mai generale, rezultată pe baza mecanicii continuului [8]. Ea este cu atît mai valabilă, cu cît deformația totală și viteza de deformare sînt mai mici.

5.4.2. MODELE REOLOGICE

În paragraful 5.4.1 s-au stabilit ecuații reologice pe baza unor modele analoge mecanice. Considerații fenomenologice pot conduce la corelații între componentele tensiunii și componentele deformației sau a vitezei de deformare, ceea ce constituie răspunsul corpurilor. Aceste probleme formează obiectul prezentului paragraf.

5.4.2.1. Funcții sau coeficienți de material

Conform ipotezelor lui Coleman și Noll [57], la forfecarea simplă a unui fluid omogen și incompresibil, tensiunea depinde de istoria deformațiilor, în limitele unei presiuni izotrope, iar tensorul istoriei deformațiilor depinde numai de viteza de forfecare și este o funcție de timpul trecut $t - t'$, independent de timpul prezent. Pe baza acestor ipoteze, componentele tensorului tensiunilor pot fi exprimate prin trei *funcții independente*

$$\tau_{yx} = -\eta(\dot{\gamma})\dot{\gamma}_{yx} \tag{5.139}$$

$$\tau_{xx} - \tau_{yy} = -\psi_1(\dot{\gamma})\,\dot{\gamma}_{yx}^2 \tag{5.140}$$

$$\tau_{yy} - \tau_{zz} = -\psi_2(\dot{\gamma})\,\dot{\gamma}_{yx}^2 \tag{5.141}$$

în care x indică direcția de curgere, $\tau_{xx} - \tau_{yy}$ este *prima diferență a tensiunilor normale* (se ia, convențional, față de direcția de curgere) și $\tau_{yy} - \tau_{zz}$ este *a doua diferență a tensiunilor normale*. Termenul $\eta(\dot{\gamma})$ reprezintă vîscozitatea aparentă dependentă de viteza de forfecare sau, după cum a fost definită în capitolul 1, vîscozitatea aparentă η_a. Cu $\psi_1(\dot{\gamma})$ și $\psi_2(\dot{\gamma})$ s-au notat *coeficientul primar* și, respectiv, *secundar al tensiunilor normale*. Funcțiile sau coeficienții de material $\eta(\dot{\gamma})$, $\psi_1(\dot{\gamma})$ și $\psi_2(\dot{\gamma})$ depind numai de natura fluidului. Ele sînt independente de particularitățile curgerii și variază cu viteza de forfecare. Această variație diferă de la un material la altul.

Coeficientul $\eta(\dot{\gamma})$ este o măsură a *componentei vîscoase* a materialului. Funcțiile $\psi_1(\dot{\gamma})$ și $\psi_2(\dot{\gamma})$ sînt o *măsură a elasticității fluidului*.

Scanned with OKEN Scanner

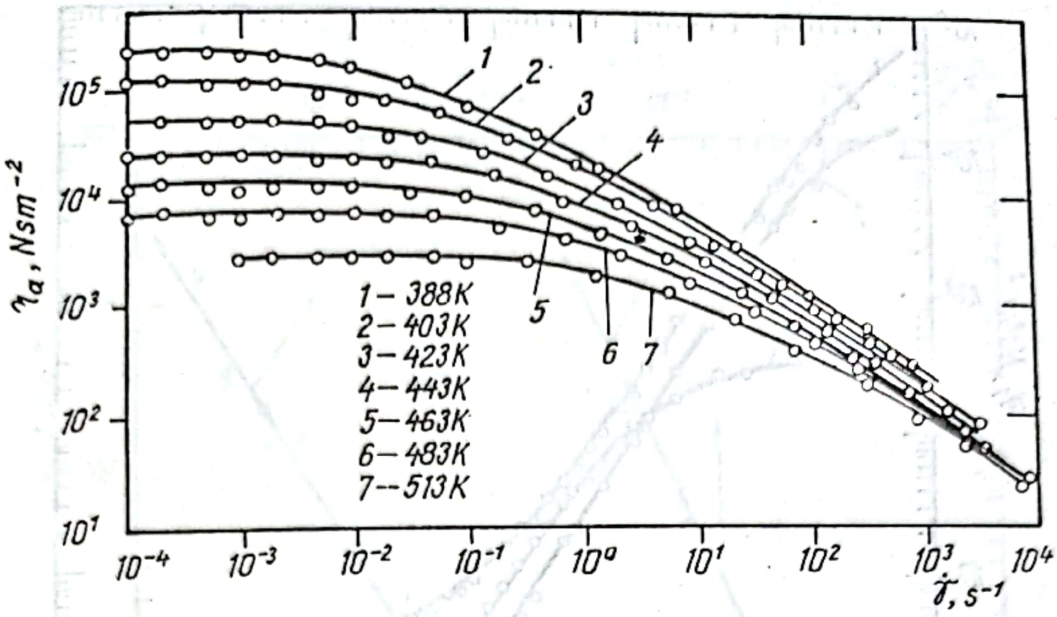


Fig. 5.18. Variația vîscozității aparente a topiturilor de polietilenă de joasă densitate, cu viteza de forfecare și cu temperatura.

Vîscozitatea aparentă este parametrul cel mai cunoscut, a cărui valoare se obține funcție de tensiunea de forfecare și viteza de forfecare. În fig. 5.18 se evidențiază influența vitezei de forfecare și a temperaturii asupra vîscozității topiturilor de polietilenă de joasă densitate [26]. La viteze de forfecare foarte mici, vîscozitatea tinde către o valoare constantă η_0, ceea ce corespunde unui domeniu de comportare newtoniană. Creșterea vitezei de forfecare fluidifică topitura de polietilenă și comportarea devine tipic pseudoplastică. Pe un domeniu larg de viteze de forfecare, în coordonate logaritmice, curbele se liniarizează și au panta cuprinsă între 0,4 și 0,85. Acesta este domeniul de valabilitate a ecuației Ostwald-de Waele. Cu cît polidispersia polimerului este mai îngustă, cu atît este mai restrîns domeniul de trecere de la vîscozitatea η_0 la domeniul de valabilitate a legii puterii. O polidispersie largă mărește domeniul de trecere și îl deplasează către viteze de forfecare mai mici. La viteze mari de forfecare, vîscozitatea tinde către o valoare constantă η_∞, independentă de viteza de forfecare.

Prima funcție sau primul coeficient al tensiunilor normale ψ_1 este pozitiv și prezintă variații mari, funcție de viteza de forfecare (fig. 5.19) [17]. La viteze de forfecare scăzute, coeficientul tinde către o valoare constantă $\psi_{1,0}$. Pe un domeniu suficient de larg al vitezelor de forfecare, în coordonate logaritmice, dependența este liniară, ceea ce sugerează o corelație de tipul legii puterii. În domeniul vitezelor de forfecare mari, pentru ψ_1, nu apare o valoare limită.

Scanned with OKEN Scanner

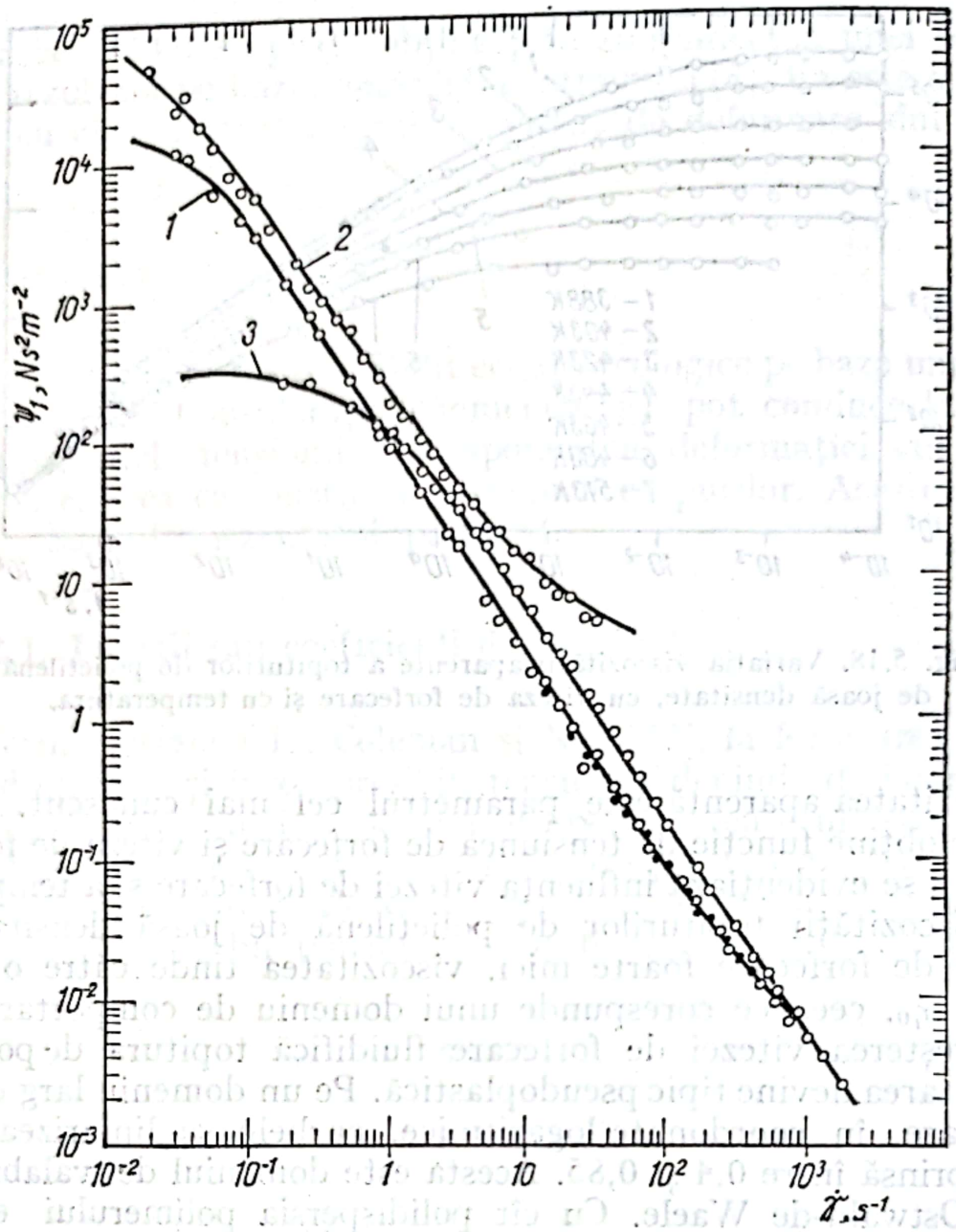


Fig. 5.19. Variația primului coeficient al tensiunilor normale ψ_1 cu viteza de forfecare:

1 — soluție de 1,5% poliacril amidă în amestec de apă cu glicerină; *2* — soluție de 2% poliizobutilenă în primol; *3* — soluție de 7% laurat de aluminiu în decalină și *m*-cresol, $T = 25°C$.

A doua funcție sau al doilea coeficient al tensiunilor normale ψ_2 are valori negative și este mai mic decît ψ_1 [8] (fig. 5.20) [12]. Ipoteza Weissenberg $\tau_{yy} = \tau_{zz}$ și $\psi_2 = 0$, conform datelor experimentale, pare să nu fie corectă.

Din reprezentarea grafică se remarcă liniarizarea datelor pe un domeniu larg de valori. De asemenea, nu se constată existența unor valori limită ale coeficientului ψ_2, la viteze foarte mici și foarte mari de forfecare.

Scanned with OKEN Scanner

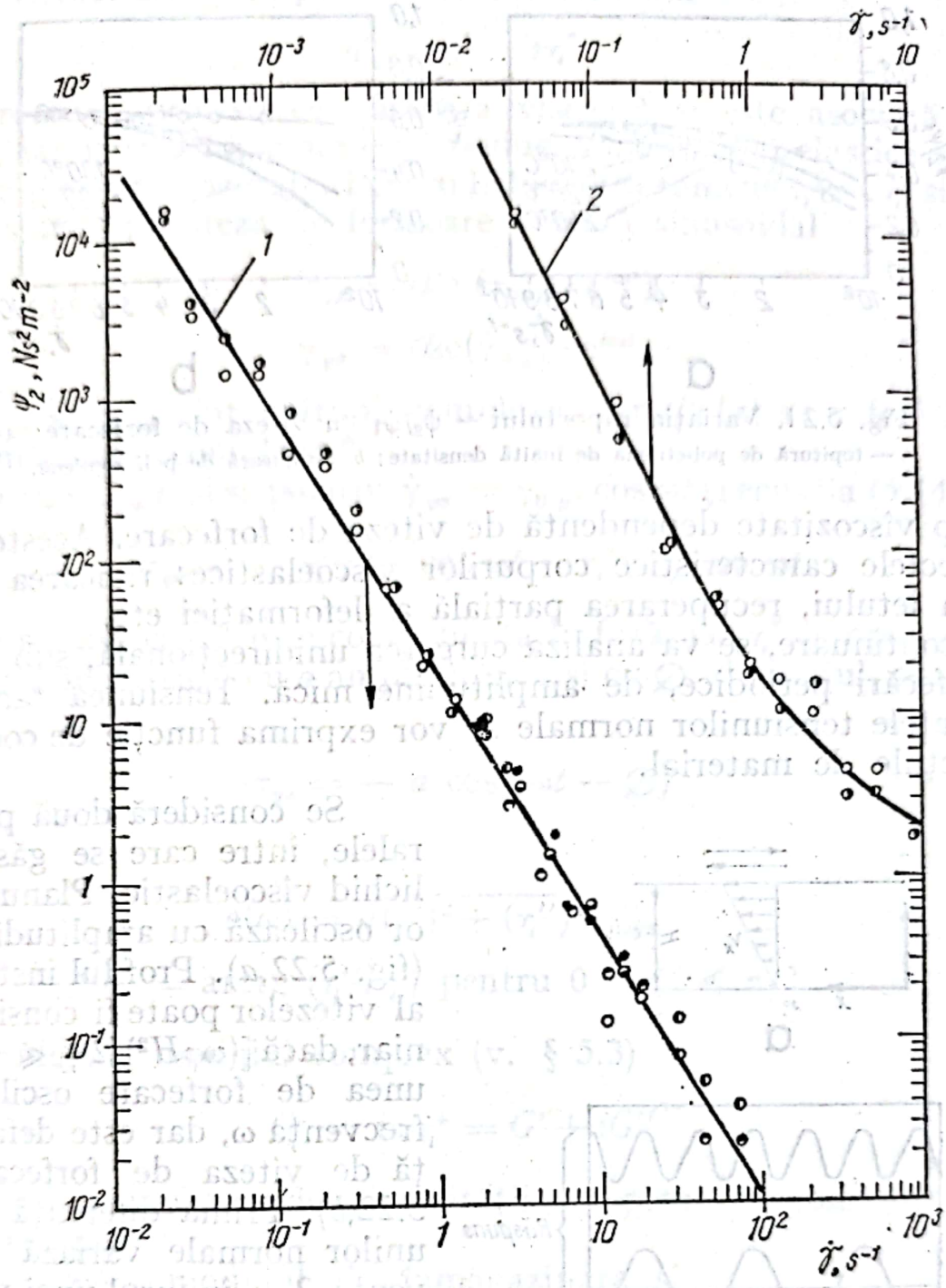


Fig. 5.20. Variația celui de al doilea coeficient al tensiunilor normale ψ_2, cu viteza de forfecare:

1 — soluție 2,5% poliacrilamidă în amestec de apă — glicerină; *2* — soluție 3% polietilenoxid în amestec de apă — glicerină — alcool izopropilic.

Raportul între coeficienții tensiunilor normale — ψ_2/ψ_1 este de ordinul 0,01—0,2 pentru soluții de poliacrilamidă și de polietilenoxid [8], iar pentru topituri de polietilenă și polipropilenă este cuprins între 0,2 și 0,6 [15] (fig. 5.21).

Acum se poate preciza că toate lichidele care au valori măsurabile ale diferențelor tensiunilor normale, $\tau_{xx} - \tau_{yy}$ și $\tau_{yy} - \tau_{zz}$, prezintă în ace-

Scanned with OKEN Scanner

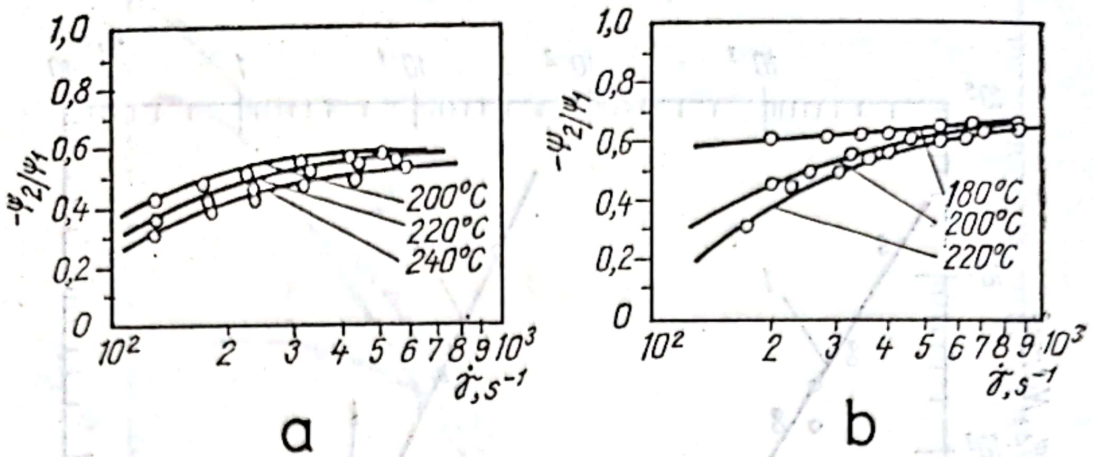


Fig. 5.21. Variația raportului $-\psi_2/\psi_1$ cu viteza de forfecare:
a — topitură de polietilenă de înaltă densitate; *b* — topitură de polipropilenă.

lași timp vîscozitate dependentă de viteza de forfecare. Acestea manifestă efectele caracteristice corpurilor vîscoelastice: ridicarea pe tijă, umflarea jetului, recuperarea parțială a deformației etc.

În continuare, se va analiza curgerea unidirecțională, sub acțiunea unei forfecări periodice, de amplitudine mică. Tensiunea tangențială și diferențele tensiunilor normale se vor exprima funcție de coeficienții sau funcțiile de material.

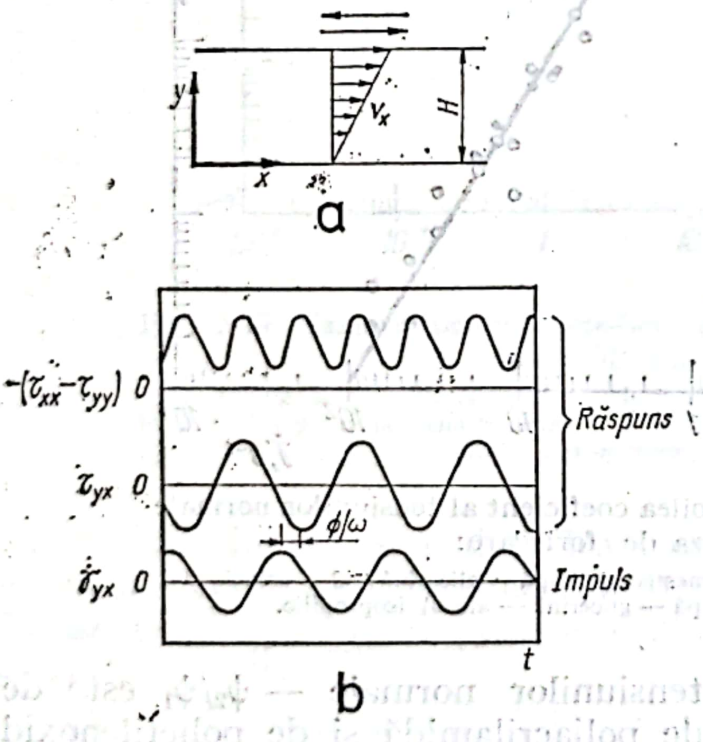


Fig. 5.22. Forfecarea periodică cu oscilații de amplitudine mică:
a — distribuția vitezelor; *b* — variația vitezei de forfecare a tensiunii și a primei diferențe a tensiunilor normale.

Se consideră două plane paralele, între care se găsește un lichid vîscoelastic. Planul superior oscilează cu amplitudine mică (fig. 5.22,*a*). Profilul instantaneu al vitezelor poate fi considerat liniar, dacă $[(\omega\rho H^2)/2\eta] \ll 1$. Tensiunea de forfecare oscilează cu frecvența ω, dar este defazată față de viteza de forfecare (fig. 5.22,*b*). Prima diferență a tensiunilor normale variază cu frecvența 2ω în jurul unei valori diferite de zero. În cazul unui lichid newtonian, tensiunea este în fază cu viteza de forfecare și diferența tensiunilor normale este nulă.

Parametrii solicitării se pot exprima funcție de partea reală și partea imaginară a vîscozității complexe $\eta(\omega)$.

$$\tau_{0,yx} = -\eta^{+} + \dot{\gamma}_{0,yx} \qquad (5.142)$$

Scanned with OKEN Scanner

în care vîscozitatea complexă este formată din

$$\eta^+ = \eta' - i\eta'' \tag{5.143}$$

Partea reală η' privește componenta vîscoasă și este asociată energiei disipate, iar partea imaginară η'' revine componentei elastice și se asociază energiei înmagazinate. Pentru lichide newtoniene $\eta' = \eta$ și $\eta'' = 0$.

Tensiunea și viteza de forfecare variază sinusoidal

$$\tau_{yx} = \mathcal{R}\mathrm{e}\,(\tau_{0,yx} \cdot \mathrm{e}^{i\omega t}) \tag{5.144}$$

$$\dot{\gamma}_{yx} = \mathcal{R}\mathrm{e}(\dot{\gamma}_{0,yx} \cdot \mathrm{e}^{i\omega t}) \tag{5.145}$$

unde $\tau_{0,yx}$ și $\dot{\gamma}_{0,yx}$ sînt mărimi complexe, iar $\mathcal{R}\mathrm{e}(x)$ se referă la partea reală a mărimilor complexe.*

Pentru $\dot{\gamma}_{0,\,yx}$ real și pozitiv $\dot{\gamma}_{yx} = \gamma_{0,yx} \cos \omega t$ și ecuația (5.142) devine

$$\tau_{yx} = -\eta'\dot{\gamma}_{0,yx} \cos \omega t - \eta''\dot{\gamma}_{0,yx} \sin \omega t \tag{5.146}$$

din care rezultă că η' este componenta în fază, iar η'' componenta defazată. Dacă se notează cu a amplitudinea și cu $\varnothing$ defazajul, se mai poate scrie

$$\tau_{yx} = -a \cos (\omega t - \varnothing) \tag{5.147}$$

în care

$$a(\omega) = \sqrt{(\eta')^2 + (\eta'')^2}\dot{\gamma}_{0,yx} \tag{5.148}$$

$$\varnothing(\omega) = \operatorname{arctg}\,(\eta''/\eta') \text{ pentru } 0 \leqslant \varnothing \leqslant \pi/2 \tag{5.149}$$

Introducînd modulul complex (v. § 5.3)

$$G^+ = i\omega\eta^+ = G' + iG'' \tag{5.150}$$

se corelează componentele vîscozității complexe cu componentele modulului complex.

$G' = \omega\eta''$ — modulul de înmagazinare și

$G'' = \omega\eta'$ — modulul de pierderi

iar $\operatorname{tg}\delta = G''/G'$ este tangenta de pierderi.

Răspunsul materialului, sub forma tensiunilor normale, se poate obține în mod identic, ținînd cont atît de deplasarea d_j față de valoarea zero, cît și de dublarea frecvenței.

$$\tau_{jj} = d_j + \mathcal{R}\mathrm{e}(\tau_{0,jj} \cdot \mathrm{e}^{2i\omega t}) \tag{5.151}$$

---

* $e^{i\alpha} = \cos\alpha + i \sin\alpha$ în care $i = \sqrt{-1}$

Scanned with OKEN Scanner

Ecuațiile (5.140) și (5.141) pot fi aplicate, introducînd funcțiile complexe ale tensiunilor normale ψ_1^+, ψ_2^+ și funcțiile de deplasare a tensiunilor normale ψ_{d1}, ψ_{d2}

$$\tau_{0,xx} - \tau_{0,yy} = -\psi_1^+ (\dot{\gamma}_{0,yx})^2 \tag{5.152}$$

$$\tau_{0,yy} - \tau_{0,zz} = -\psi_2^+ (\dot{\gamma}_{0,yx})^2 \tag{5.153}$$

$$d_x - d_y = -\psi_{d1} |\dot{\gamma}_{0,yx}|^2 \tag{5.154}$$

$$d_y - d_z = -\psi_{d2} |\dot{\gamma}_{0,yx}|^2 \tag{5.155}$$

Coeficienții complecși ai tensiunilor normale, prin similitudine cu ecuația (5.143), se pot descompune în două părți

$$\psi_1^+ = \psi_1' - i\psi_1'' \tag{5.156}$$

$$\psi_2^+ = \psi_2' - i\psi_2'' \tag{5.157}$$

în care ψ_1', ψ_2' reprezintă partea reală și ψ_1'', ψ_2'' partea imaginară. Pentru $\dot{\gamma}_{0,yx}$ real se obțin expresiile diferențelor tensiunilor normale, în cazul solicitărilor periodice.

$$\tau_{xx} - \tau_{yy} = -\psi_{d1}(\dot{\gamma}_{0,yx})^2 - \psi_1'(\dot{\gamma}_{0,yx})^2 \cos 2\omega t - \psi_1'' (\dot{\gamma}_{0,yx})^2 \sin 2\omega t, \tag{5.158}$$

$$\tau_{yy} - \tau_{zz} = -\psi_{d2}(\dot{\gamma}_{0,yx})^2 - \psi_2'(\dot{\gamma}_{0,yx})^2 \cos 2\omega t - \psi_2''(\dot{\gamma}_{0,yx})^2 \sin 2\omega t \tag{5.159}$$

Din date experimentale obținute cu topituri și soluții de polimeri, s-au stabilit relațiile între coeficienții de material — componentele vîscozității complexe și funcțiile complexe ale tensiunilor normale — și frecvența oscilațiilor [8,17, 12,27, 33]. În fig. 5.23 sînt reprezentate componentele vîscozității complexe pentru topituri de polietilenă [8,27], iar în fig. 5.24 și 5.25 pentru soluții de polimeri și de săpun [8,17]. Pe baza lor se pot face cîteva observații importante.

Vîscozitatea dinamică η' la frecvențe mici tinde către o valoare constantă η_0', într-o manieră asemănătoare vîscozității aparente η_0. O tendință similară, dar mai puțin evidentă, apare și la componenta defazată η'' a vîscozității complexe, asociată energiei înmagazinate.

Scanned with OKEN Scanner

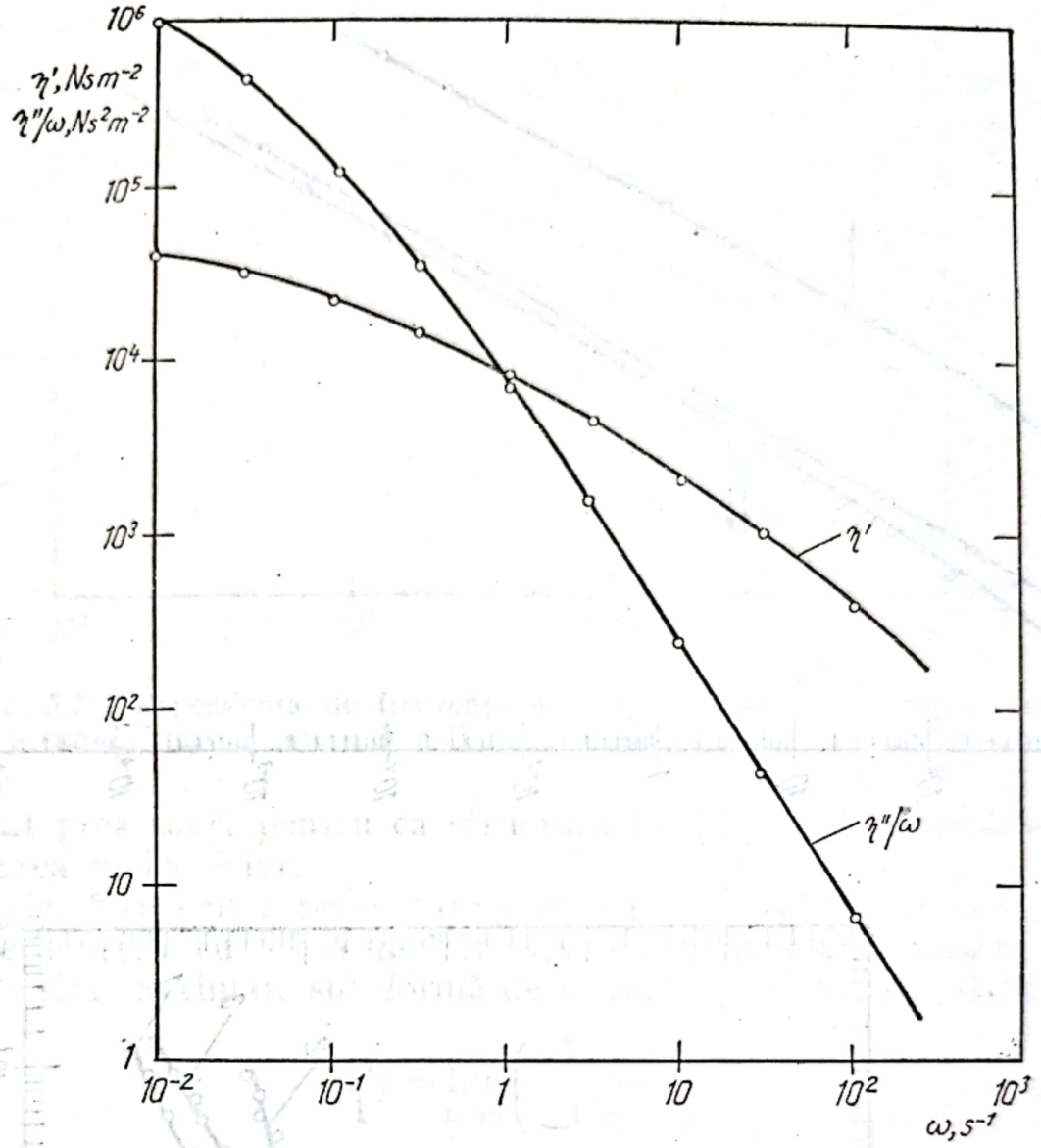


Fig. 5.23. Dependența componentelor vîscozității complexe de frecvența oscilațiilor, pentru topituri de polietilenă

Aceasta, în domeniul valorilor mici, variază liniar cu frecvența, iar raportul η''/ω are o valoare limită diferită de zero.

Pe un domeniu larg al frecvențelor, în coordonate logaritmice, dependența liniară între componentele vîscozității complexe și frecvență, sugerează relații de tipul legii puterii.

La frecvențe mari η' pare să tindă către o valoare limită η'_∞, tendință evidentă numai la soluțiile diluate. Valoarea limită η'_∞ este ceva mai mare decît vîscozitatea solventului. Raportul η''/ω, în domeniul frecvențelor mari, poate fi proporțional cu $1/\omega^2$. Întrucît aceasta corespunde modulului de înmagazinare G', rezultă că lichidul se comportă ca un solid perfect elastic. La frecvențe înalte, timpul corespunzător unei perioade

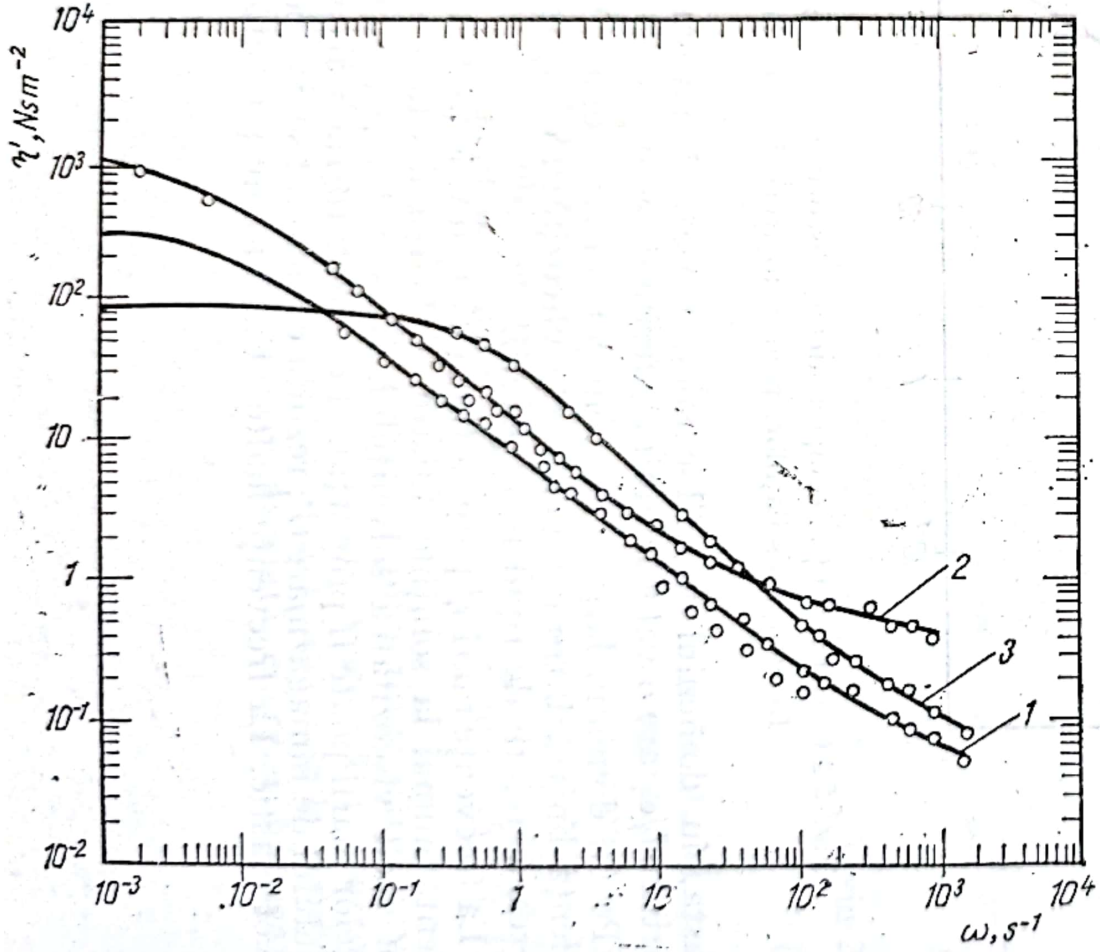


Fig. 5.24. Componenta reală a vîscozității complexe, funcție de frecvență: 1 — soluție 1,5% poliacrilamidă în amestec de apă și glicerină; 2 — soluție 2% poliizobutilenă în primol; 3 — soluție 7% laurat de aluminiu în amestec de decalină și m-cresol.

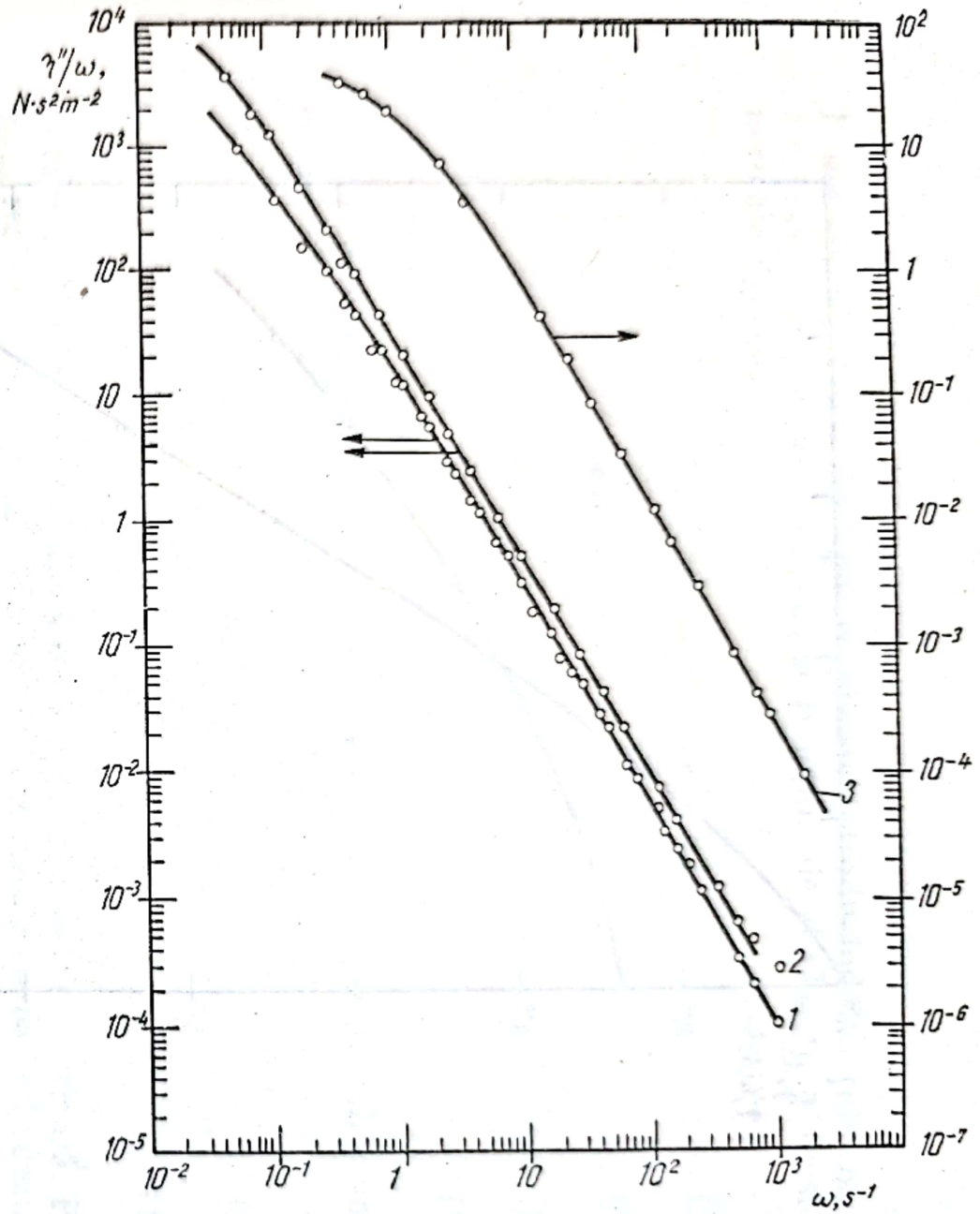


Fig. 5.25. Componenta imaginară a vîscozității complexe funcție de frecvență, pentru soluțiile din fig. 5.24.

Scanned with OKEN Scanner

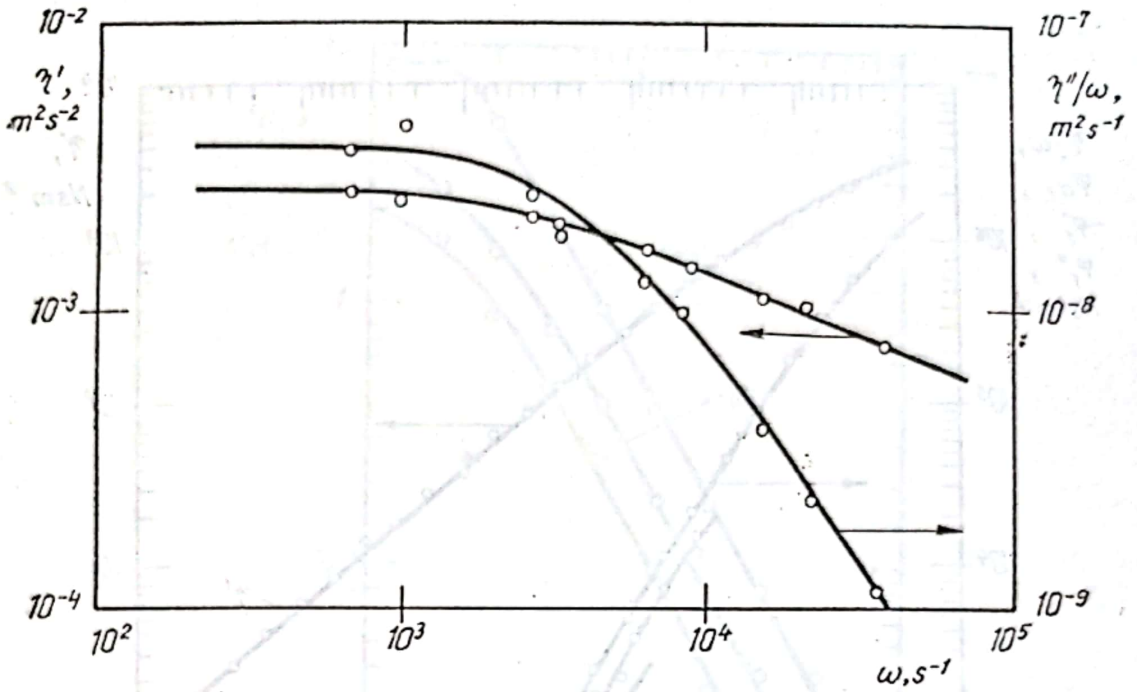


Fig. 5.26. Dependența de frecvență a componentelor vîscozității complexe intrinseci (soluții de poli α — metilstiren în α — clornaftalen).

este mult prea scurt pentru ca structura lichidului să se modifice prin rearanjarea moleculelor.

În fig. 5.26 sînt reprezentate datele pentru soluții diluate de poli (α — metilstiren) cu masă molară $1{,}43 \cdot 10^6$, în α-clornaftalen [8.33]. Mărimile sînt exprimate sub formă de vîscozități intrinseci, definite de

$$[\eta'] = \lim_{C \to 0} \left(\frac{\eta' - \eta_s}{C \eta_s} \right) \qquad (5.160)$$

$$[\eta''] = \lim_{C \to 0} \left(\frac{\eta''/\omega}{C \eta_s} \right)$$

unde C este concentrația și η_s vîscozitatea dizolvantului. Mărimile $[\eta']$ și $[\eta'']$ se obțin prin reprezentarea componentelor η' și η'' funcție de concentrație și extrapolare la $C = 0$.

Prin analogie cu componentele $[\eta']$ și $[\eta'']$ s-au definit mărimile $[G'']$ și, respectiv, $[G']$, a căror corelații au forma

$$[G'] = \omega \eta_s [\eta''] \qquad (5.161)$$

$$[G''] = \omega \eta_s [\eta']$$

Componentele coeficienților complecși ai tensiunilor normale ψ_1', ψ_1'', ψ_2', ψ_2'' și coeficienții de deplasare a tensiunilor normale ψ_{d1}, ψ_{d2} [v.ec. (5.158) și (5.159)] s-au reprezentat în fig. 5.27 și 5.28, funcție de frecvență.

Scanned with OKEN Scanner

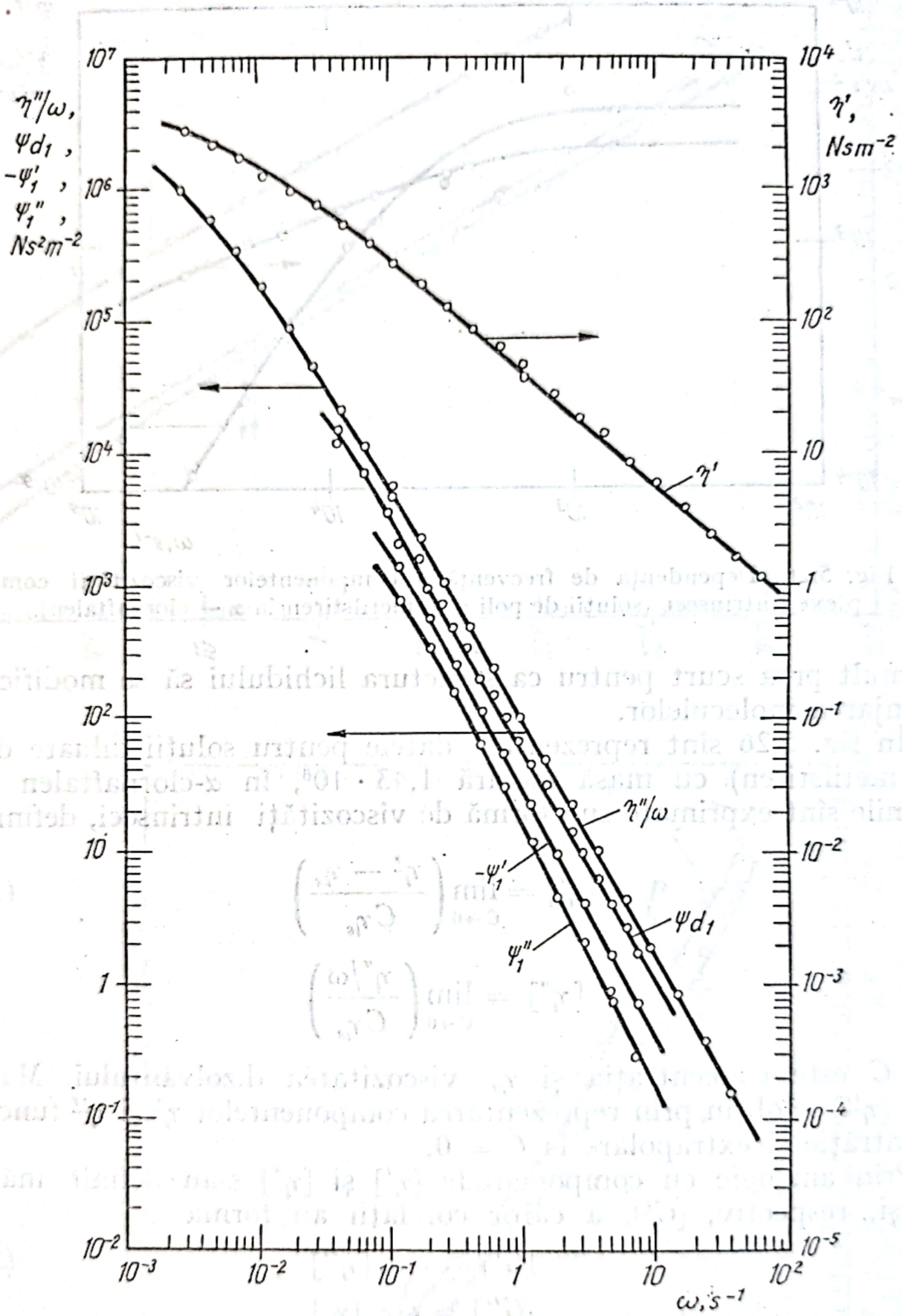


Fig. 5.27. Dependența de frecvență a coeficienților de material ai tensiunilor normale (prima diferență).

Scanned with OKEN Scanner

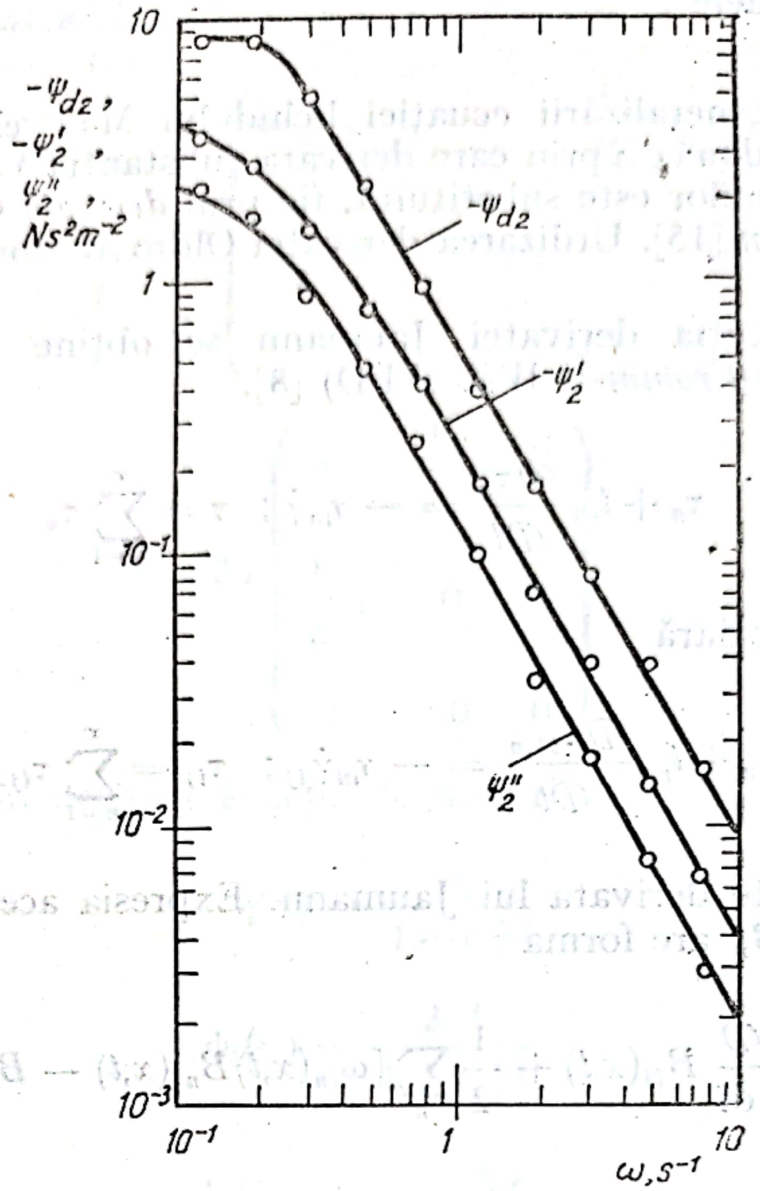


Fig. 5.28. Dependența de frecvență a coeficienților de material ai tensiunilor normale (diferența a doua)

Determinările au fost făcute cu soluții de 3% polietilenoxid în amestec, de apă, glicerină și alcool izopropilic [8,12].

Se observă că toți coeficienții tensiunilor normale prezintă o dependență de frecvența oscilațiilor, similară cu a raportului η''/ω. Valorile coeficienților ψ_{a1} și ψ_{a2} sînt mai mari decît coeficienții complecși $|\psi_1^+|$ și $|\psi_2^+|$, ceea ce demonstrează că diferențele tensiunilor normale vor avea totdeauna același semn; prima diferență $\tau_{xx} - \tau_{yy}$ este negativă și a doua $\tau_{yy} - \tau_{zz}$ este pozitivă. Semnul diferențelor se păstrează și la forfecarea simplă în regim staționar. Al doilea coeficient de deplasare a tensiunilor normale ψ_{a2} este mai mic cu două ordine de mărime decît primul coeficient ψ_{a1}, ceea ce sugerează cu o oarecare incertitudine, posibilitatea simplificării ecuațiilor ce descriu curgerea oscilatorie [8].

5.4.2.2. Modele

În scopul generalizării ecuației lichidului Maxwell [v.ec. (5.61)] au fost sugerate două căi prin care derivata substanțială a componentelor tensorului tensiunilor este substituită, fie prin *derivata Oldroyd*, fie prin *derivata Jaumann* [15]. Utilizarea derivatei Oldroyd conduce la *modelul White-Metzner*.

Prin substituția derivatei Jaumann se obține *modelul DeWitt* [15] sau *Zaremba-Fromm-DeWitt* (ZFD) [8].

$$\tau_n + t_{rn}\frac{\mathcal{D}\tau_n}{\mathcal{D}t} = -\eta_n\dot{\gamma}\,;\quad \tau = \sum_{n=1}^{\infty}\tau_n \tag{5.162}$$

sau sub formă scalară

$$\tau_{ij,n} + t_{rn}\frac{\mathcal{D}\tau_{ij,n}}{\mathcal{D}t} = -\eta_n\dot{\gamma}_{ij}\,;\quad \tau_{ij} = \sum_{n=1}^{\infty}\tau_{ij,n} \tag{5.163}$$

în care $\mathcal{D}/\mathcal{D}t$ este derivata lui Jaumann. Expresia acesteia pentru un tensor arbitrar B, are forma

$$\frac{\mathcal{D}}{\mathcal{D}t}B_{ij}(x,t) = \frac{\mathcal{D}}{\mathrm{d}t}B_{ij}(x,t) + \frac{1}{2}\sum_n\left[\omega_{in}(x,t)B_{nj}(x,t) - B_{in}(x,t)\omega_{nj}(x,t)\right] \tag{5.164}$$

unde ω reprezintă *vorticitatea* [v. ec. (1.65)]. Derivata precizează cum se modifică parametrul solicitării în timp, urmărit de un observator ce se deplasează și se rotește o dată cu fluidul. Primul termen $\mathrm{D}/\mathrm{d}t$ reprezintă derivata materială a parametrului solicitării și ultimii doi termeni se referă la mișcarea de rotație.

Pentru forfecare în regim staționar, din modelul ZFD, pentru funcțiile de material, rezultă următoarele expresii [8]

$$\eta = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\eta_n}{1+t_{rn}^2\dot{\gamma}^2} \tag{5.165}$$

$$\frac{1}{2}\psi_1 = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\eta_n t_{rn}}{1+t_{rn}^2\dot{\gamma}} = -\psi_2 \tag{5.166}$$

Scanned with OKEN Scanner

Han [15] transcrie modelul pentru forfecarea simplă în regim staționar, în formă matricială

$$\begin{pmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{21} & \tau_{22} & \tau_{23} \\ \tau_{31} & \tau_{32} & \tau_{33} \end{pmatrix} + t_r\dot{\gamma}\begin{pmatrix} -\tau_{12} & \frac{1}{2}(\tau_{11}-\tau_{22}) & 0 \\ \frac{1}{2}(\tau_{11}-\tau_{22}) & \tau_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= 2\eta\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2}\dot{\gamma} & 0 \\ \frac{1}{2}\dot{\gamma} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{5.167}$$

din care se obțin aceleași funcții de material

$$\eta(\dot{\gamma}) = \frac{\eta}{1+t_r^2\dot{\gamma}^2}$$

$$\psi_1(\dot{\gamma}) = \frac{2\eta t_r}{1+t_r^2\dot{\gamma}^2} \tag{5.168}$$

$$\psi_2(\dot{\gamma}) = -\frac{\eta t_r}{1+t_r^2\dot{\gamma}^2}$$

Ecuația corpului Lethersich sau modelul Jeffreys descrie comportarea vîscoelastică liniară [v.ec.(5.105).] Folosirea derivatei Jaumann, în locul derivatelor parțiale, duce la o nouă formă, neliniară, a *modelului Jeffreys**.

$$\tau + t_r\frac{\mathcal{D}}{\mathcal{D}t}\tau = -\eta\left(\dot{\gamma} + t_I\frac{\mathcal{D}}{\mathcal{D}t}\dot{\gamma}\right) \tag{5.169}$$

în care $\mathcal{D}/\mathcal{D}t$ este simbolul derivatei Jaumann [v.ec. (5.164) și t_r, t_I sînt constante de timp.

* Rezultată prin transcrierea modelului în coordonate corotaționale și integrare [8].

Scanned with OKEN Scanner

Plecînd de la modelul Jeffreys neliniar, se stabilesc expresiile funcțiilor de material pentru forfecarea simplă în regim staționar. Se consideră două plane paralele, din care unul se deplasează în propriul plan, cu viteză constantă. Viteza fluidului depinde numai de coordonata y, normală la direcția de curgere $v_x = \dot{\gamma} y$, în care viteza de forfecare $\dot{\gamma}$ este constantă.

Derivatele tensorilor, la forfecarea simplă, se reduc la următoarele forme [8]

$$\frac{\mathcal{D}}{\mathcal{D}t}\tau = \begin{pmatrix} -\tau_{yx} & \frac{1}{2}(\tau_{xx}-\tau_{yy}) & -\frac{1}{2}\tau_{yz} \\ \frac{1}{2}(\tau_{xx}-\tau_{yy}) & \tau_{xy} & \frac{1}{2}\tau_{xz} \\ -\frac{1}{2}\tau_{yz} & \frac{1}{2}\tau_{xz} & 0 \end{pmatrix}\dot{\gamma} \tag{5.170}$$

$$\frac{\mathcal{D}}{\mathcal{D}t}\dot{\gamma} - \frac{1}{2}(\omega\cdot\dot{\gamma} - \dot{\gamma}\cdot\omega) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\dot{\gamma}^2 \tag{5.171}$$

Ecuația simplificată a modelului Jeffreys se poate transcrie în formă matricială

$$\begin{pmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \tau_{zz} \end{pmatrix} + t_r \begin{pmatrix} -\tau_{yx} & \frac{1}{2}(\tau_{xx}-\tau_{yy}) & -\frac{1}{2}\tau_{yz} \\ \frac{1}{2}(\tau_{xx}-\tau_{yy}) & \tau_{xy} & \frac{1}{2}\tau_{xz} \\ -\frac{1}{2}\tau_{yz} & \frac{1}{2}\tau_{xz} & 0 \end{pmatrix}\dot{\gamma} =$$

$$= -\eta \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\dot{\gamma} - \eta t_I \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\dot{\gamma}^2 \tag{5.172}$$

Tensorul tensiunilor este simetric și tensiunile normale sînt nedeterminate, de aceea se obțin din ecuația matricială următoarele ecuații

$$(\tau_{xx} - \tau_{yy}) - 2t_r\tau_{yx}\dot{\gamma} = 2\,\eta t_I\dot{\gamma}^2 \tag{5.173}$$

$$(\tau_{yy} - \tau_{zz}) + t_r\tau_{yx}\dot{\gamma} = -\eta t_I\dot{\gamma}^2 \tag{5.174}$$

$$\tau_{yx} + \frac{1}{2}t_r(\tau_{xx} - \tau_{yy})\,\dot{\gamma} = -\eta\dot{\gamma} \tag{5.175}$$

$$\tau_{xz} - \frac{1}{2}t_r\tau_{yz}\dot{\gamma} = 0 \tag{5.176}$$

$$\tau_{yz} + \frac{1}{2}t_r\tau_{xz}\dot{\gamma} = 0 \tag{5.177}$$

Scanned with OKEN Scanner

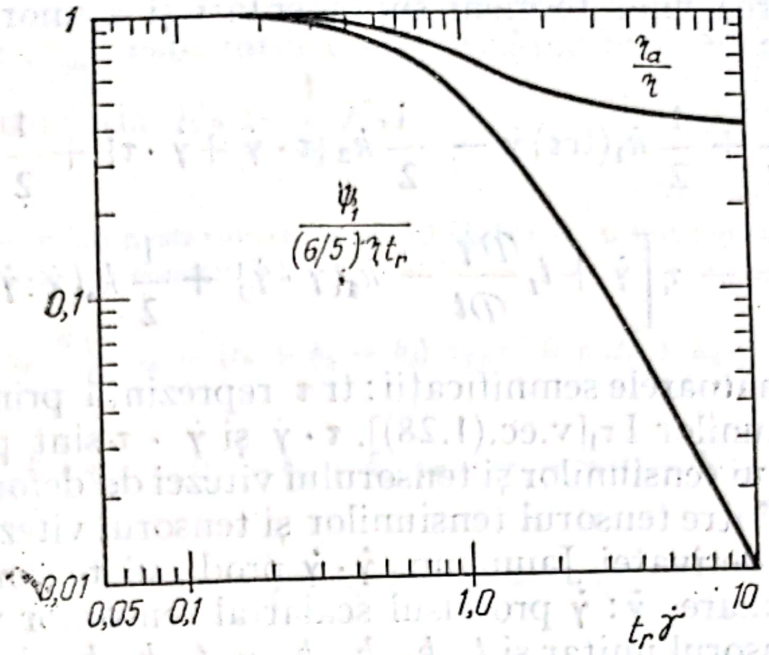


Fig. 5.29. Variația vîscozității aparente și a primului coeficient al tensiunilor normale, conform modelului Jeffreys, pentru $t_1/t_r = 2/5$.

Pentru forfecare simplă, componentele τ_{xz} și τ_{yz} sînt egale cu zero și din primele trei ecuații rezultă:

$$\tau_{yx} = -\eta \frac{1 + t_r t_I \dot{\gamma}^2}{1 + t_r^2 \dot{\gamma}^2} \dot{\gamma} \quad \text{sau} \quad \eta_a = \eta \frac{1 + t_r t_I \dot{\gamma}^2}{1 + t_r^2 \dot{\gamma}^2} \tag{5.178}$$

$$\tau_{xx} - \tau_{yy} = -\frac{2\eta (t_r - t_I)}{1 + t_r^2 \dot{\gamma}^2} \dot{\gamma}^2 \quad \text{sau} \quad \psi_1 = \frac{2\eta (t_r - t_I)}{1 + t_r^2 \dot{\gamma}^2} \tag{5.179}$$

$$\tau_{yy} - \tau_{zz} = +\frac{\eta (t_r - t_I)}{1 + t_r^2 \dot{\gamma}^2} \dot{\gamma}^2 \quad \text{sau} \quad \psi_2 = -\frac{\eta (t_r - t_I)}{1 + t_r^2 \dot{\gamma}^2} \tag{5.180}$$

În ultimele ecuații η are semnificația vîscozității la viteză de forfecare egală cu zero η_0 și $\psi_2/\psi_1 = -0{,}5$. Variația vîscozității aparente și al primului coeficient al tensiunilor normale — ecuațiile (5.178) și (5.179) — s-a reprezentat în figura 5.29. Curbele au aspecte asemănătoare cu cele obținute experimental pentru diferite lichide. La viteze de forfecare mici, s-au obținut experimental, pentru raportul ψ_2/ψ_1 valori cuprinse între $-0{,}02$ și $-0{,}4$.

Întrucît cele mai multe soluții și topituri de polimeri se fluidifică sub acțiunea forfecării și tensiunea de forfecare este o funcție monoton crescătoare de viteză de forfecare, se deduce că $(1/9) < (t_r/t_I) < 1$. Această restricție conduce la concluzia că $(\eta_\infty/\eta_0) > (1/9)$, ceea ce nu este real pentru soluții concentrate și topituri de polimeri.

Derivata Jaumann introduce în modelul Jeffreys [v.ec.(5.169)] termeni neliniari. Oldroyd [31, 32] generalizează modelul lui Jeffreys

Scanned with OKEN Scanner

prin introducerea unor termeni suplimentari și a unor constante adecvate

$$\tau + t_r \frac{\mathcal{D}\tau}{\mathcal{D}t} + \frac{1}{2} k_1(\mathrm{tr}\tau)\dot{\gamma} - \frac{1}{2} k_2\{\tau \cdot \dot{\gamma} + \dot{\gamma} \cdot \tau\} + \frac{1}{2} k_3(\tau : \dot{\gamma})\delta =$$

$$= -\eta\left[\dot{\gamma} + t_I \frac{\mathcal{D}\dot{\gamma}}{\mathcal{D}t} - k_4\{\dot{\gamma} \cdot \dot{\gamma}\} + \frac{1}{2} k_5(\dot{\gamma} : \dot{\gamma})\delta\right] \qquad (5.181)$$

Notațiile au următoarele semnificații: $\mathrm{tr}\,\tau$ reprezintă primul invariant al tensorului tensiunilor $I\tau_1$[v.ec.(1.28)], $\tau \cdot \dot{\gamma}$ și $\dot{\gamma} \cdot \tau$ sînt produsele tensionale ale tensorului tensiunilor și tensorului vitezei de deformare, $\tau : \dot{\gamma}$ este produsul scalar între tensorul tensiunilor și tensorul vitezei de deformare, $\mathcal{D}/\mathcal{D}t$ simbolul derivatei Jaumann, $\dot{\gamma} \cdot \dot{\gamma}$ produsul tensorial al tensorilor vitezei de deformare, $\dot{\gamma} : \dot{\gamma}$ produsul scalar al tensorilor vitezei de deformare, δ este tensorul unitar și t_r, k_1, k_2, k_3, η, t_I, k_4 k_5 sînt constante sau coeficienți de material.

Acesta este *modelul Oldroyd cu opt constante de material*. El descrie răspunsul unui număr mare de corpuri și, prin simplificare, este foarte util în abordarea teoretică a unor probleme de curgere.

Se impun cîteva restricții în alegerea constantelor pentru ca funcțiile de material, astfel determinate, să nu fie în contradicție cu rezultatele experimentale [8].

a. Întrucît componenta reală η' a vîscozității complexe descrește cu frecvența ω, se impune condiția $0 < t_I < t_r$.

b. Vîscozitatea este o funcție descrescătoare în raport cu viteza de forfecare, ceea ce conduce la condiția $0 < K_2 < K_1$. Notațiile K_1 și K_2 au următoarele semnificații

$$K_1 = t_r^2 + k_1\left(k_2 - \frac{3}{2} k_3\right) - k_2(k_2 - k_3)$$

$$K_2 = t_r t_I + k_1\left(k_4 - \frac{3}{2} k_5\right) - k_2(k_4 - k_5)$$

c. La reprezentarea dependenței funcțiilor $\eta(\dot{\gamma})$ și $\eta'(\omega)$, pe același grafic, curba η este situată deasupra curbei η'. Pentru ca această dispunere să se mențină și în domeniul frecvențelor sau a vitezelor de forfecare mici, se impune condiția $K_1 - K_2 < t_r(t_r - t_I)$.

---

* Prin efectuarea operațiilor din paranteze rezultă mărimi a căror semnificație este: ( ) — scalar, [ ] — vector, { } — tensor.

Scanned with OKEN Scanner

d. Deoarece $|\tau_{yx}|$ este totdeauna crescător cu $\dot{\gamma}$, în regim staționar, este necesară condiția $K_2 > \frac{1}{9} K_1$.

La forfecare în regim nestaționar, modelul Oldroyd cu opt constante [v. ec. (5.181)] se reduce la un set de patru ecuații [8]

$$\left(1 + t_r \frac{\partial}{\partial t}\right) \tau_{xx} - (t_r + k_2 - k_3)\, \tau_{yx}\dot{\gamma} = \eta\,(t_I + k_4 - k_5)\, \dot{\gamma}^2 \tag{5.182}$$

$$\left(1 + t_r \frac{\partial}{\partial t}\right) \tau_{yy} + (t_r - k_2 + k_3)\, \tau_{yx}\dot{\gamma} = -\eta\,(t_I - k_4 + k_5)\, \dot{\gamma}^2 \tag{5.183}$$

$$\left(1 + t_r \frac{\partial}{\partial t}\right) \tau_{zz} + k_3 \eta_{yx}\dot{\gamma} = -\eta k_5 \dot{\gamma}^2 \tag{5.184}$$

$$\left(1 + t_r \frac{\partial}{\partial t}\right) \tau_{yx} + \frac{1}{2}(t_r - k_2 + k_1)\, \tau_{xx}\dot{\gamma} - \frac{1}{2}(t_r + k_2 - k_1)\, \tau_{yy}\dot{\gamma} + \frac{1}{2} k_1 \tau_{zz}\dot{\gamma} = -\eta \left(1 + t_I \frac{\partial}{\partial t}\right) \dot{\gamma} \tag{5.185}$$

În regim staționar, derivatele în raport cu timpul se anulează și din setul de ecuații rezultate se obțin coeficienții sau funcțiile de material.

$$\frac{\eta_a}{\eta} = \frac{1 + \left[t_r t_I + k_1 \left(k_4 - \frac{3}{2} k_5\right) - k_2(k_4 - k_5)\right] \dot{\gamma}^2}{1 + \left[t_r^2 + k_1 \left(k_2 - \frac{3}{2} k_3\right) - k_2(k_2 - k_3)\right] \dot{\gamma}^2} \tag{5.186}$$

$$\frac{\psi_1}{2\eta t_r} = \frac{\eta(\dot{\gamma})}{\eta} - \frac{t_I}{t_r} \tag{5.187}$$

$$\frac{\psi_2}{\eta t_r} = -\left(1 - \frac{k_2}{t_r}\right) \frac{\eta(\dot{\gamma})}{\eta_a} + \frac{t_I}{t_r}\left(1 - \frac{k_4}{t_I}\right) = -\frac{\psi_1}{2\eta t_r} + \left(\frac{k_2 \eta_a}{t_r \eta} - \frac{k_4}{t_r}\right) \tag{5.188}$$

La solicitări periodice cu amplitudine mică, termenii neliniari din modelul Oldroyd pot fi neglijați și componentele vîscozității complexe sînt date de relațiile

$$\frac{\eta'}{\eta} = \frac{1 + t_r t_I \omega^2}{1 + t_r^2 \omega^2} \tag{5.189}$$

$$\frac{\eta''}{\eta} = \frac{(t_r - t_I)\, \omega}{1 + t_r^2 \omega^2} \tag{5.190}$$

Expresiile acestor funcții sînt identice cu cele ce se obțin din modelul Jeffreys [v. ec. (5.169)].

Scanned with OKEN Scanner

Se consideră un element de volum de lichid supus la o solicitare de tracțiune, în regim staționar, după direcția z. Viteza de alungire $\dot{\gamma}_{zz}$ fiind constantă, componentele vitezei vor avea forma

$$v_z = \dot{\gamma}_{zz} z; \quad v_x = -\frac{1}{2}\dot{\gamma}_{zz} x; \quad v_y = -\frac{1}{2}\dot{\gamma}_{zz} y \tag{5.191}$$

Din modelul Oldroyd (5.181) se obțin două ecuații

$$(1 + k_2\dot{\gamma}_{zz})(\tau_{xx} - \tau_{zz}) - \left(\frac{3}{2}k_1 - k_2\right)\dot{\gamma}_{zz}(\tau_{xx} + \tau_{yy} + \tau_{zz}) =$$

$$= 3\eta\dot{\gamma}_{zz}(1 - k_4\dot{\gamma}_{zz}) \tag{5.192}$$

$$(2k_2 - 3k_3)\dot{\gamma}_{zz}(\tau_{xx} - \tau_{zz}) + (\tau_{xx} + \tau_y + \tau_{zz}) = 3\eta\dot{\gamma}_{zz}^2(2k_4 - 3k_5) \tag{5.193}$$

Prin rezolvarea lor în raport cu diferența $\tau_{xx} - \tau_{zz}$, se obține expresia vîscozității longitudinale

$$\eta_l = 3\eta \frac{1 - k_4\dot{\gamma}_{zz} + \left(\frac{3}{2}k_1 - k_2\right)(2k_4 - 3k_5)\dot{\gamma}_{zz}^2}{1 - k_2\dot{\gamma}_{zz} + \left(\frac{3}{2}k_1 - k_2\right)(2k_2 - 3k_3)\dot{\gamma}_{zz}^2} \tag{5.194}$$

Din modelul Okdroyd cu opt constante, prin simplificare se pot obține mai multe modele utile în abordarea problemelor de curgere. Ele sînt sistematizate în tabelul 5.2 [8]. Funcțiile de material pentru forfecare și pentru alungire s-au obținut din ecuațiile (5.186)—(5.188) și (5.194).

Numeroși autori [6,7,9—11, 13, 30, 36, 40, 41, 52—54] au elaborat modele reologice empirice sub formă diferențială sau integrală. Majoritatea pot fi aplicate la o clasă largă de fluide.

O ecuație diferențială generală corelează tensorul tensiunilor cu tensorul vitezelor de deformare, tensorul vorticității și funcțiile de material.

$$\tau = -\eta\dot{\gamma} - \left(\frac{1}{2}\psi_1 + \psi_2\right)\{\dot{\gamma}\cdot\dot{\gamma}\} + \frac{1}{2}\psi_1\frac{\mathcal{D}}{\mathcal{D}t}\dot{\gamma}\ ^{*)} \tag{5.195}$$

Scanned with OKEN Scanner

Tabelul 5.2

Modele rezultate din modelul Oldroyd cu opt constante

Modelul	Număr constante	Valorile constantelor t_r	t_I	k_1	k_2	k_3	k_4	k_5	Funcțiile de material η_a, ψ_1, ψ_2	Viscozitatea longitudinală η_l
Oldroyd cu 6 const.	6					0		0	η_a depinde $\dot{\gamma}$ ψ_1 depinde de $\dot{\gamma}$ ψ_2 este raportat la ψ_1	v.ec.(5.194)
Oldroyd cu 4 const.	4				t_r	0	t_I	0	η_a depinde de $\dot{\gamma}$ ψ_1 depinde de $\dot{\gamma}$ $\psi_2 = 0$	v. ec. (5.194)
Fluidul A Oldroyd	3			0	$-t_r$	0	$-t_I$	0	$\eta_a = \eta$ $\psi_1 = 2\eta(t_r - t_I)$ $\psi_2 = -\psi_1$	$3\eta \dfrac{1 + t_I\dot{\gamma}_{ii} - 2t_r t_I \dot{\gamma}_{ii}^2}{1 + t_r\dot{\gamma}_{ii} - 2t_r^2\dot{\gamma}_{ii}^2}$
Fluidul B Oldroyd	3			0	t_r	0	t_I	0	$\eta_a = \eta$ $\psi_1 = 2\eta(t_r - t_I)$ $\psi_2 = 0$	$3\eta \dfrac{1 - t_I\dot{\gamma}_{ii} - 2t_r t_I \dot{\gamma}_{ii}^2}{1 - t_r\dot{\gamma}_{ii} - 2t_r^2\dot{\gamma}_{ii}^2}$
Williams-Oldroyd cu cu 3 constante	3			0	t_r	$\frac{2}{3}t_r$	t_I	$\frac{2}{3}t_r$	η_a depinde de $\dot{\gamma}$ ψ_1 depinde de $\dot{\gamma}$ $\psi_2 = 0$	$3\eta \dfrac{1 - t_I\dot{\gamma}_{ii}}{1 - t_r\dot{\gamma}_{ii}}$

Scanned with OKEN Scanner

Tabelul 5.2 (continuare)

Modelul	Număr constante	Valorile constantelor							Funcțiile de material η_a, ψ_1, ψ_2	Viscozitatea longitudinală η_l
		t_r	t_I	k_1	k_2	k_3	k_4	k_5		
Jeffreys	3			0	0	0	0	0	η_a depinde de $\dot{\gamma}$ ψ_1 depinde de $\dot{\gamma}$ $\psi_2 = -\frac{1}{2}\psi_1$	3η
Denn-Maxwell	3		0	0	t_r	0		0	$\eta_a = (1 - t_r k_4 \dot{\gamma}^2)$ $\psi_1 = 2t_r\eta$ $\psi_2 = 0$	$3\eta \frac{1 - k_4\dot{\gamma}_{ii} - 2t_r k_4 \dot{\gamma}_{ii}^2}{1 - t_r\dot{\gamma}_{ii} - 2t_r^2\dot{\gamma}_{ii}^2}$
Fluid de ordinul doi	3	0		0	0	0		0	$\eta_a = \eta$ $\psi_1 = -2\eta t_I$ $\psi_2 = \eta(t_I - k_4)$	$3\eta(1 - k_4\dot{\gamma}_{ii})$
Maxwell	2		0	0	t_r	0	0	0	$\eta_a = \eta$ $\psi_1 = 2\eta t_r$ $\psi_2 = -\psi_1$	$3\eta \frac{1}{1 - t_r\dot{\gamma}_{ii} - 2t_r^2\dot{\gamma}_{ii}^2}$

Scanned with OKEN Scanner

Funcțiile de material η, ψ_1, ψ_2 sînt dependente de viteza de deformare. Derivata Jaumann are forma

$$\frac{\mathcal{D}}{\mathcal{D}t}\dot{\gamma} = \frac{\partial}{\partial t}\dot{\gamma} + \{\mathbf{v}\cdot\nabla\dot{\gamma}\} + \frac{1}{2}(\{\omega\cdot\dot{\gamma}\} - \{\dot{\gamma}\cdot\omega\})^{*)} \qquad (5.196)$$

Notația ω reprezintă tensorul vorticității [v. ec. (1.65)] și $\dot{\gamma}\cdot\dot{\gamma}$, $\omega\cdot\dot{\gamma}$ sînt produsele tensoriale între tensorii vitezelor de deformare, respectiv între tensorul vorticității și tensorul vitezei de deformare.

Ecuația (5.195) — *Criminale — Ericksen — Filbey* (CEF) — prin omiterea termenilor ψ_1 și ψ_2, referitori la componenta elastică, se reduce la o formă ce descrie comportarea unui fluid ce posedă numai vîscozitate. În cazul forfecării simple între două plane paralele, în regim, staționar, ecuația CEF se simplifică, regăsindu-se unul din grupurile de ecuații descrise anterior. Componentele tensorilor și ecuația se vor transcrie în formă matricială, din care se poate obține cu ușurință expresiile tensiunilor.

Tensorul vitezei de forfecare și al vorticității, pentru forfecare simplă, vor lua forma

$$\dot{\gamma} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\dot{\gamma}; \quad \omega = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\gamma \qquad (5.197)$$

și derivatele

$$\{\dot{\gamma}\cdot\dot{\gamma}\} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\dot{\gamma}^2; \quad \{\omega\cdot\dot{\gamma}\} = -\{\dot{\gamma}\cdot\omega\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\dot{\gamma}^2 \qquad (5.198)$$

După substituție rezultă forma matricială a ecuațiilor (5.195)

$$\begin{pmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \tau_{zz} \end{pmatrix} = -\eta\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\dot{\gamma} - \frac{1}{2}(\psi_1+\psi_2)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\dot{\gamma}^2 +$$

$$+\frac{1}{2}\psi_1\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\dot{\gamma}^2 \qquad (5.199)$$

---

* Mărimile din paranteze reprezintă: ( ) — scalar, [ ] — vector, { } — tensor.

din care se obține

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = -\eta\dot{\gamma}$$
$$\tau_{xx} - \tau_{yy} = -\psi_1\dot{\gamma}^2$$
$$\tau_{yy} - \tau_{zz} = -\psi^2\dot{\gamma}^2$$

grupul de ecuații (5.135) — (5.137).

Rivlin și Ericksen [35] au formulat o *teorie a vîscoelasticității neliniare*, conform căreia componentele tensorului tensiunilor, într-un element de volum al corpului, la timpul t, sînt funcție numai de gradientul deplasării, viteza și derivatele vitezei în raport cu timpul. Corpul este lipsit de memorie, întrucît tensiunile la timpul t sînt independente de tensiunile la un alt timp. Funcția reologică generală are forma

$$\tau = f(\Gamma_1\Gamma_2,\ldots\Gamma_n) \tag{5.200}$$

în care $\Gamma_1,\ldots\Gamma_n$ sînt tensori Rivlin-Ericksen. În cazul tensorilor simetrici de ordinul doi, funcția se simplifică

$$\tau = f(\Gamma_1, \Gamma_2) \tag{5.201}$$

în care tensorii sînt definiți de relațiile

$$\Gamma_1 = \dot{\gamma} = \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \tag{5.202}$$

$$\Gamma_2 = \frac{\mathcal{D}\dot{\gamma}}{\mathcal{D}t} + \{\dot{\gamma}\cdot\dot{\gamma}\} \tag{5.203}$$

Primul termen din partea dreaptă a relației (5.203) reprezintă derivata Jaumann.

Pentru fluide necompresibile, folosind teorema Cayley — Hamilton, ecuația (5.201) poate fi scrisă într-o formă mai explicită

$$\begin{aligned}\tau = {} & \varnothing_1\Gamma_1 + \varnothing_2\Gamma_1^2 + \varnothing_3\Gamma_2 + \varnothing_4\Gamma_2^2 + \varnothing_5(\Gamma_1\Gamma_2 + \Gamma_2\Gamma_1) + \\ & + \varnothing_6(\Gamma_1^2\Gamma_2 + \Gamma_2\Gamma_1^2) + \varnothing_7(\Gamma_2^2\Gamma_1 + \Gamma_1\Gamma_2^2) + \\ & + \varnothing_8(\Gamma_1^2\Gamma_2^2 + \Gamma_2^2\Gamma_1^2)\end{aligned} \tag{5.204}$$

Coeficienții de material $\varnothing_1\ldots\varnothing_8$ sînt dependenți de invarianții tensorilor Γ_1, Γ_2.

La forfecarea simplă, în regim staționar, ultima ecuație se simplifică la

$$\tau = k_1(\dot{\gamma})\Gamma_1 + k_2(\dot{\gamma})\Gamma_1^2 + k_3(\dot{\gamma})\Gamma_2 \tag{5.205}$$

Scanned with OKEN Scanner

în care k_1, k_2, k_3 sînt funcție de viteza de forfecare $\dot{\gamma}$, respectiv de al doilea invariant al tensorului vitezei de deformare Γ_1. Funcțiile de material din (5.205) se pot transcrie în forma

$$\eta(\dot{\gamma}) = k_1(\dot{\gamma}); \quad \psi_1(\dot{\gamma}) = -2k_3(\dot{\gamma}); \quad \psi_2(\dot{\gamma}) = k_2(\dot{\gamma}) + 2k_3(\dot{\gamma}) \tag{5.206}$$

În ipoteza că tensiunea depinde numai de tensorul Γ_1, pentru fluide necompresibile, ecuația (5.204) se reduce la

$$\tau = k_1\Gamma_1 + k_2\Gamma_1^2 \tag{5.207}$$

care reprezintă modelul Reiner — Rivlin [8, 15].

Cînd componentele forfecării, ale tensorului tensiunilor, sînt funcții liniare de componentele tensorului vitezei de deformare și fluidul este necompresibl, ecuația (5.207) se simplifică la

$$\tau = k_1\Gamma_1 = \eta\dot{\gamma}. \tag{5.208}$$

modelul lichidului Newton.

Modelele prezentate în acest capitol descriu comportarea vîscoelastică a corpurilor. Cele bazate pe modele mecanice nu mai sînt actuale, sînt simple, dar oferă avantajul intuirii și vizualizării procesului de deformare. Aceste modele sînt liniare și sînt limitate numai pentru deformații mici.

Maniera modernă de modelare, bazată pe un *sistem de coordonate corotațional**, conduce la ecuații neliniare, de formă diferențială sau integrală. Modelele diferențiale conțin derivata corotațională sau Jaumann Cu ajutorul lor se abordează numeroase probleme de curgere. În cuprinsul capitolului s-au dat cîteva modele de acest tip.

*Derivata codeformațională** sau Oldroyd conține, de asemenea, termeni neliniari. Fiind mai puțin folosită, în textul capitolului este numai amintită.

BIBLIOGRAFIE

1. AKLONIS, J. J., MACKNIGHT, W. J. și SHEN, M., *Introduction to polymer viscoelasticity*, New York, Wiley-Interscience, 1972.
2. ALFREY, T., *Dinamics of viscoelastic behavior*. În: Eirich, F. R. Rheology. Theory and applications, Vol. I, New York, Academic Press, 1956.

* Termenii sînt însușiți din limba engleză [8].

Scanned with OKEN Scanner

3. BAGLEY, E. B., CABOT, I. M. și WEST, D. C., In: J. Appl. Phys., 29, p.109, 1958.
4. BAGLEY, E. B., In: Trans. Soc. Rheol. 5, p. 355, 1961.
5. BENBOW, J. J. și LAMB, P., In: SPE Trans, 3, p. 1, 1963.
6. BERSNSTEIN, B., KEARSLEY, E. A. și ZAPAS, L. J., In: Trans. Soc. Rheol., 7, p. 391, 1963.
7. BIRD, R. B. și CARREAU, P. J., In: Chem. Eng. Sci, 23, p. 427, 1968.
8. BIRD, R. B., ARMSTRONG, R. C. și HASSAGER, O., *Dynamics of polymeric liquids*. Vol. 1. Fluid mechanics, New York, John Wiley and Sons, 1977.
9. CARREAU, P. J., In: Trans. Soc. Rheol. 16, p. 99, 1972.
10. CARREAU, P. J., MACDONALD, I. F. și BIRD, R. B., In: Chem. Eng. Sci, 23, p. 901, 1968.
11. CHEN, I. și BOGUE, D. C., In: Trans. Soc. Rheol. 16, p. 59, 1972.
12. CRISTIANSEN, E. B. și LEPPARD, W. R., In: Trans. Soc. Rheol. 18, p. 65, 1974.
13. FREDRICKSON, A. G., In: Chem. Eng. Sci, 17, p. 155, 1962.
14. GARNER, F. H. și NISSAN, A. H., In: Nature (London) 158, p. 634, 1946.
15. HAN, C. D., Rheology in polymer processing, New York, Academic Press, 1976.
16. HOWELLS, E. R. și BENBOW, J. J., In: Trans. Plastics Inst. 30, p. 240, 1962,
17. HUPPLER, J. D., ASHARE, E. și HOLMES, L. A., In: Trans. Soc. Rheol., 11, p. 159, 1967.
18. HUTTON, J. F., In: Nature, 1941, p. 175, 1964.
19. JINESCU, V. V., *Proprietățile fizice și termomecanica materialelor plastice*, Vol. I și II, București, Editura tehnică, 1979.
20. LENK, R. S., *Plastics Rheology*, London, Maclaren and Sons, 1968.
21. LODGE, A. S., *Elastic liquids*, New York, Academic Press, 1964.
22. LUPTON, J. M. și REGESTER, J. W., In: Polymer Eng. Sci. 5, p. 235, 1965.
23. MCINTOSH, D. L., *Elastic effects in the extrusion of polymer solutions*. Teză de doctorat Washington University, St. Louis, 1960.
24. McKELVEY, J. M., *Polymer Processing*, New York, John Wiley and Sons, 1962.
25. MEISSNER, J., In: Rheol. Acta, 10, p. 230, 1971.
26. MEISSNER, J., In: Kunststoffe, 61, p 576, 1971.
27. MEISSNER, J., In: Pure and Appl. Chem., 42, p. 551, 1975.
28. METZGER, A. P. și KNOX, J. R., In: Trans. Soc. Rheol., 9, Part 1, p. 13, 1965.
29. METZNER, A. B., In: A. I. Ch. E.J., 13,2, p. 316, 1967.
30. OLDROYD, J. G., In: Proc. Roy. Soc. (London), A. 200, p. 45, 1950.
31. OLDROYD, J. G., In: Proc. Roy. Soc., A 245, p. 278, 1958.
32. OLDROYD, J. G., In: Rheol. Acta, 1, p. 337, 1961.
33. OSAKI, K., SHRAG, J. L. și FERRY, J. D., In: Macromolecules, 5, p. 144 1972.
34. PEARSON, J.R.A., *Vîsco-elastic properties of molten polymers* In: Jenkins, A.D. Polymer science, Vol. 1, Amsterdam, North-Holland Publishing Company, 1972.
35. RIVLIN, R S. ȘI ERICKSEN, J. L., In: J. Rat. Mech. Anal. 4, p. 323, 1955.
36. RIVLIN, R. S. ȘI SAWYERS, K. N., In: Ann. of Fluid Mech. 3, p. 117, 1971.
37. REINER, M., *Deformation, strain and flow*, Sec. ed., London, H. K. Lewis, 1960
38. SIEGLAFF, C. L., In: SPE Trans., 4, p. 129, 1964.
39. SPRIGGS, T. W., In: Chem. Eng. Sci., 20, p. 931, 1965.
40. TANNER, R. I. și SIMMONS, J. M., In: Chem. Eng. Sci., 22, p. 1803, 1967,
41. TANNER, R. I., In: A.I.Ch.E.J., 15, p. 177, 1969.
42. TANNER, R. I., In: J. Polym. Sci., A-2, 8, p. 2078, 1970.
43. TEODORESCU, P. P. și ILLE, V. *Teoria elasticității și introducere în mecanica solidelor deformabile*, Cluj-Napoca, Editura Dacia, 1976
44. TORDELLA, J. P., *Unstable fow of molteh polymers*, In: Eirich, F.R. Rheology. Theory and Applications, Vol. 5, New York, Academic Press, 1969.

Scanned with OKEN Scanner

45. TORDELLA, J. P., In: J. Appl. Phys., 27, p. 454, 1956.
46. TORDELLA, J. P., In: J. Appl. Polymer Sci., 7, p. 215, 1963.
47. TUDOSE, R. Z. și LUNGU, M., In: Mat. Plast., București, VII, p. 240, 1970.
48. TUDOSE, R. Z., *Procese și utilaje în industria de prelucrare a compușilor macromoleculari*, București, Editura tehnică, 1976.
49. UEBLER, E. A., PH. D. thesis, University of Delaware, Newark, 1966.
50. VAICUM, A., *Studiul reologic al corpurilor solide*, București, Editura Academiei R.S.R., 1978.
51. WEISSENBERG, K., In: Nature (London), 158, p. 634, 1946.
52. WHITE, J. L. și METZNER, A. B., In: J. Appl. Polym. Sci., 7, p. 1867, 1963.
53. WILLIAMS, M. C. și BIRD, R. B., In: Phys. Fluids., 5, p. 1126, 1962.
54. WILLIAMS, M. C. și BIRD, R. B., In: Eng. Chem. Fundamentals, 3, p. 42, 1964.

Scanned with OKEN Scanner

6

CORPURI VÎSCOPLASTICE

6.1. INTRODUCERE

Materialele vîscoplastice sînt denumite în mod curent „plastice" sau corpuri cu prag de tensiune. Ele încep să curgă numai după ce solicitarea atinge valoarea τ_0, care reprezintă pragul de tensiune sau pragul de curgere. În domeniul tensiunilor ce satisfac condiția $\tau < \tau_0$ materialul se comportă ca un corp solid, iar pentru $\tau \geqslant \tau_0$ are comportare de corp vîscos.

În primul paragraf al capitolului 5 s-a făcut o clasificare a corpurilor, bazată pe asocierea proprietăților reologice. O astfel de clasificare este adoptată de școala franceză de reologie și se bazează pe modelarea analogică mecanică. Prin asocierea amortizoarelor cu corpuri cu frecare, rezultă modele ce descriu comportarea vîscoplastică, iar modele formate din arcuri și corpuri cu frecare descriu comportarea elastoplastică. O astfel de vizualizare a comportării reologice ridică întrebarea: corpurile vîscoplastice au și o componentă elastică? sau, corpurile elastoplastice posedă o componentă vîscoasă?

După cum s-a menționat, *plasticitatea nu este o proprietate intrinsecă a materiei, ci un mod particular de manifestare, sub acțiunea solicitărilor.* Numeroase corpuri lichide și solide au comportare plastică. Se pot considera vîscoplastice acele corpuri, preponderent lichide, ce au prag de curgere, pînă la care sînt elastice sau rigide, iar la solicitări mai mari decît valoarea pragului, prezintă fenomenul de curgere. Materialele elastoplastice se caracterizează prin valori mai mari ale pragului de tensiune, pînă la care sînt elastice, iar după depășirea acestuia prezintă fenomenul de fluaj. În general, ele sînt solide.

Scanned with OKEN Scanner

Fredrickson [2] precizează că componenta elastică și cea vîscoasă a corpurilor vîscoelastice se manifestă în toate punctele corpului solicitat la forfecare. La corpurile plastice cele două proprietăți se manifestă simultan, dar în puncte diferite ale corpului. Această manifestare nu este consecința neomogenității corpului. Diferența între comportări se datorește diferenței dintre tensiunile ce acționează în punctele corpului. La solicitări reduse este dominantă comportarea de corp solid — elastică sau rigidă — , iar la solicitări mai mari devine dominantă comportarea lichidă-vîscoasă.

Comportarea vîscoplastică este caracteristică materialelor: topituri de polimeri, nămoluri de foraj, ciment, numeroase suspensii, untură, paste de hîrtie, săpun și suspensiile de detergenți, ciocolată, etc. [4, 7—10].

Foarte multe suspensii prezintă un prag de tensiune. Ele curg numai după ce tensiunea de forfecare devine egală sau mai mare decît pragu de curgere. Comportarea se explică prin existența unei structuri tridi mensionale, care este capabilă să împiedice curgerea la valori ale ten siunii tangențiale mai mici decît ale pragului de tensiune. Valoarea pragului de curgere la aceste corpuri este de ordinul unităților (N/m^2). După îndepărtarea solicitării, structura tridimesională se reface instantaneu.

În foarte puține cazuri, materialele vîscoplastice sînt dependente de timp, prezentînd fenomenul de tixotropie. La aceste corpuri, dependența între tensiune și viteza de forfecare, în sens crescător și descrescător, este reprezentată prin linii distincte. Funcție de istoria forfecării, linia coborîtoare poate ajunge în punctul inițial, corespunzător pragului de tensiune, sau într-un punct situat mai jos [6]. Valoarea inițială a pragului de tensiune se reface după un timp de staționare.

Comportarea vîscoplastică este caracteristică corpurilor cu stare de agregare lichidă.

6.2. EFECTE SPECIFICE CORPURILOR VÎSCOPLASTICE

Comportarea preponderentă de corp solid sau de corp lichid, între anumite limite de solicitare și existența unei valori critice de separație între cele două domenii, conduce la intuiția unor efecte specifice. Unul dintre acestea apare la curgerea lichidelor vîscoplastice prin secțiuni de diverse geometrii.

Scanned with OKEN Scanner

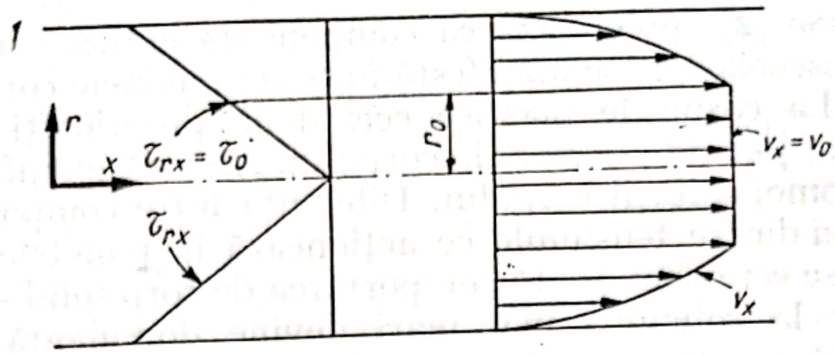


Fig. 6.1. Distribuția tensiunilor de forfecare și a vitezelor la curgerea lichidelor vîscoplastice în conducte.

6.2.1. CURGEREA CU MIEZ PISTON

Se consideră un fluid viscoplastic în curgere printr-un tub cu secțiune circulară, sub acțiunea unei diferențe de presiune. Curgerea este laminară și izotermă. Tensiunea de forfecare variază radial de la zero, în axul conductei, pînă la o valoare maximă, lîngă perete (fig. 6.1). În domeniul $r < r_0$, tensiunea este mai mică decît pragul de tensiune τ_0, între straturile de lichid nu apare forfecare, și curgerea este de tip piston, cu viteza uniformă v_0. În zona $r > r_0$, tensiunea de forfecare îndeplinește condiția $\tau_{rx} > \tau_0$, are loc o curgere cu forfecare și viteza variază de la v_0 pînă la valoarea zero, lîngă perete (fig. 6.1). Așadar, un fluid vîscoplastic în zona centrală prezintă o curgere de tip piston, sau cu deplasare totală, iar în exteriorul acestei zone, în secțiunea inelară, viteza este variabilă.

Curgerea lichidelor în filme subțiri, pe un perete vertical se caracterizează printr-o suprafață liberă, pe care, de cele mai multe ori, forțele de frecare sînt neglijabile.

Un lichid vîscoplastic, la curgerea în film subțire, va prezenta, spre deosebire de celelalte lichide, o zonă cu deplasare totală (fig. 6.2). Astfel s-a explicat cauza menținerii vopselelor proaspete pe suprafețe verticale.

Se consideră o suprafață verticală pe care curge un lichid vîscoplastic sub acțiunea forței gravitaționale. Componenta z a ecuației mișcării (v. tab. 1.9) se reduce la

$$\frac{d\tau_{xz}}{dx} = \rho g \tag{6.1}$$

După integrare, considerînd suprafața liberă a filmului lipsită de valuri se obține

$$\tau_{xz} = -\rho g(\delta - x) \tag{6.2}$$

Scanned with OKEN Scanner

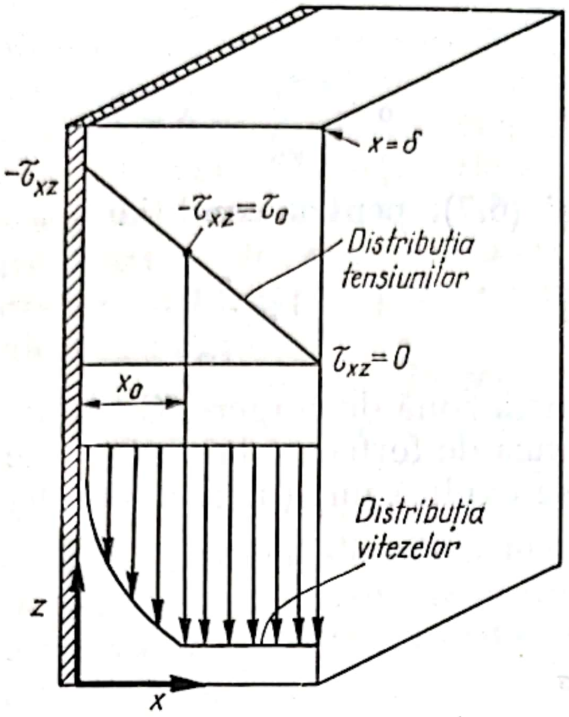


Fig. 6.2. Curgerea lichidelor vîscoplastice în film subțire.

în care δ este grosimea filmului. Din ecuație rezultă că tensiunea de forfecare variază liniar; are valoare maximă lîngă perete și zero la suprafața liberă.

Un lichid cu prag de tensiune τ_0 va curge numai dacă τ_{xz} depășește valoarea critică τ_0. Cînd $|\tau_{xz}| \leqslant \tau_0$ corpul se comportă ca un solid, iar pentru $|\tau_{xz}| > \tau_0$, va curge ca un lichid vîscos. Conform ecuației (6.2) condiția de curgere este

$$\rho g(\delta - x) > \tau_0 \tag{6.3}$$

sau, mai departe

$$x < \delta - \frac{\tau_0}{\rho g} \equiv x_0 \tag{6.4}$$

Domeniul de curgere va fi cuprins între limitele

$$0 \leqslant x < \delta - \frac{\tau_0}{\rho g} \tag{6.5}$$

Relația de ordine $|\tau_{xz}| \leqslant \tau_0$ corespunde zonei fără curgere, în care lichidul se deplasează ca un piston (fig. 6.2).
Deci, se poate scrie

$$\rho g(\delta - x) \leqslant \tau_0 \tag{6.6}$$

Scanned with OKEN Scanner

sau limitele domeniului

$$\delta - \frac{\tau_0}{\rho g} < x \leqslant \delta \tag{6.7}$$

Din relațiile (6.5) și (6.7), pentru condiția

$$\delta \leqslant \frac{\tau_0}{\rho g} \tag{6.8}$$

rezultă că nu mai există zonă de curgere. Grosimea filmului este suficient de mică, încît tensiunea de forfecare la perete este mai mică decît pragul de curgere τ_0. Așa se explică menținerea vopselelor proaspete pe suprafețe verticale.

6.2.2. EFECTUL σ

Comportarea vîscoplastică, după cum s-a mai menționat, apare foarte frecvent la suspensii. Efectul σ sau Magnus este specific suspensiilor. El se manifestă la suspensii în curgere.

Într-o suspensie stabilă, în repaus, concentrația fazei solide este uniformă și nu prezintă variații cu distanța de la perete. Lîngă peretele recipientului porozitatea stratului crește și concentrația scade. (fig.6.3,*a*).

Dacă suspensia este adusă în stare de curgere (fig. 6.3, *b*) datorită distribuției neuniforme a vitezelor v_y, cu alte cuvinte, datorită gradien-

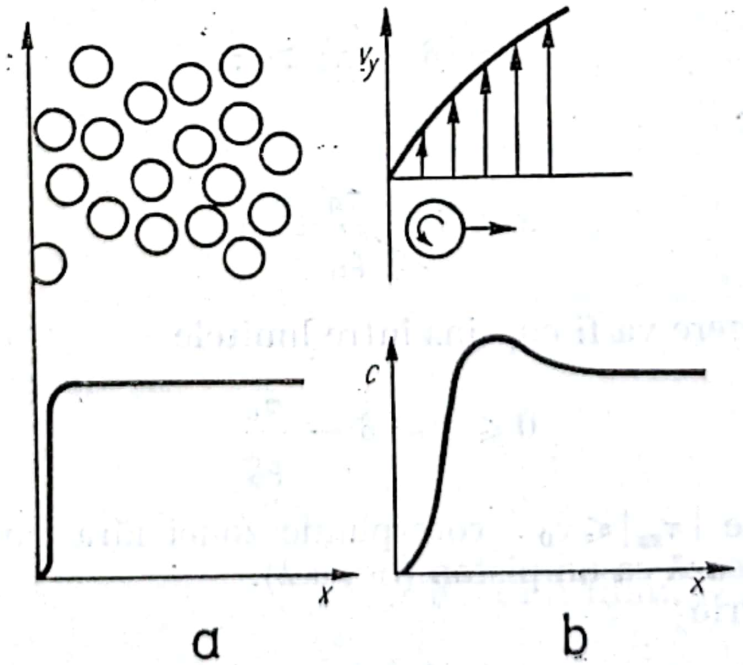


Fig. 6.3. Efectul σ (Magnus).

tului de viteză, particulele capătă o mișcare de rotație. Rotația este mai accentuată în vecinătatea peretelui, unde gradienții de viteză sînt mai mari. Comparînd sensul de mișcare al suprafeței particulei, cu sensul de mișcare al fazei lichide se constată că forțele de frecare sînt neuniform distribuite. Rezultanta acestor forțe determină depărtarea fazei disperse de perete [10]. Deplasarea particulelor cauzează o creștere a concentrației fazei disperse la o oarecare distanță de perete (curba din fig. 6.3, *b*), după care revine la valoarea inițială.

Repartiția neuniformă a concentrației în secțiunea de curgere cu forfecare are drept consecință repartiția neuniformă a proprietăților, dintre care cea mai importantă este viscozitatea. Lîngă perete, unde tensiunea și viteza de forfecare sînt maxime, viscozitatea este mai mică. În această zonă va apărea un gradient de viteză mai mare decît cel rezultat din teorie. Viscozitatea unei suspensii, determinată cu capilare de diametre diferite, va avea valori diferite datorită efectului σ. Diferența nu apare în cazul lichidelor omogene.

6.3. ECUAȚII REOLOGICE SAU CONSTITUTIVE

Modelarea comportării corpurilor vîscoplastice s-a realizat cu ajutorul modelelor mecanice sau pe cale empirică prin prelucrarea datelor experimentale obținute pentru forfecare simplă. Plecînd de la aceste ecuații reologice s-au făcut și unele generalizări.

6.3.1. MODELE ANALOGE MECANICE

Modelele mecanice ale corpurilor vîscoplastice sînt formate din amortizoare și corpuri cu frecare. Cel mai simplu model rezultă prin legarea unui amortizor în serie cu un corp cu frecare, (fig. 6.4,*a*). Pînă la pragul de curgere τ_0 corpul are comportare de lichid newtonian.

$$\tau_{yx} = \eta \dot{\gamma}_{yx} \tag{6.9}$$

După egalarea tensiunii $\tau_{yx} = \tau_0$, viteza de forfecare poate avea orice valoare mai mare decît $\dot{\gamma}_0$. În acest caz patina are rolul unui limitator al solicitării; corpul nu poate suporta tensiuni mai mari decît τ_0 (fig.6.4,*b*).

Asocierea în paralel a n elemente formate dintr-un amortizor înseriat cu o patină,* reproduce o comportare mai complicată. Dependența

* Noțiunile de corp cu frecare și patină sînt identice.

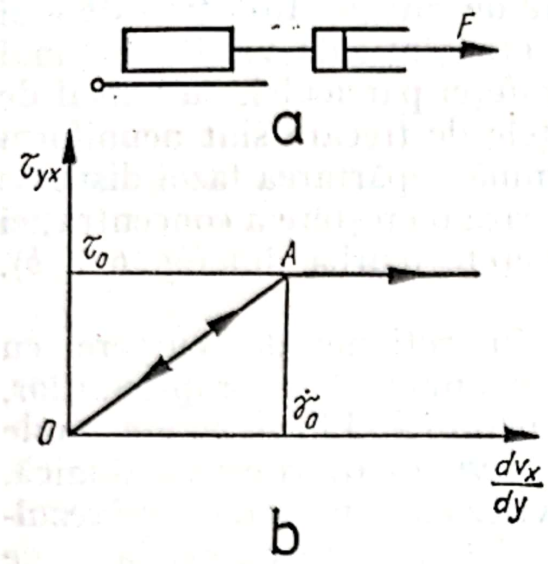


Fig. 6.4. Modelul corpului vîscoplastic cu două elemente înseriate:
a — modelul mecanic; *b* — curba răspuns.

$\tau - \dot{\gamma}$ va fi formată dintr-o linie frîntă formată din n segmente. Cînd $n \to \infty$ se obține o curbă. Dacă la modelul cu o infinitate de astfel de elemente se adaugă un amortizor liber, ceea ce echivalează cu un cuplu de două elemente, la care pragul de tensiune al patinei este egal cu infinit, se obține o curbă ce pleacă din origine (fig. 6.5, curba 1). Cînd amortizorul liber este înlocuit cu o patină liberă, cu prag de tensiune τ_0, se obține o curbă ce intersectează ordonata în τ_0 (curba *2*).

Curba *1* din fig. 6,5, *b* corespunde unei comportări pseudoplastice (v.cap.4). Pentru a stabili ecuația reologică pe baza modelului mecanic, se definește un spectru al pragurilor vitezelor de forfecare $f(\dot{\gamma}_0)$ (v. fig.6.4,*b*), care reprezintă suma vîscozităților elementelor pentru care pragul vitezelor de deformare este cuprins între $\dot{\gamma}_0$ și $\dot{\gamma}_0 + d\dot{\gamma}_0$. Elementele pentru care pragul de tensiuhe nu este depășit ($\dot{\gamma} < \dot{\gamma}_{0i}$), vor fi solicitate fiecare de o tensiune egală cu $\eta_i \dot{\gamma}_i$, sau pentru ansamblul acestor elemente

$$\dot{\gamma} \int_{\dot{\gamma}}^{\infty} f(\dot{\gamma}_0) d\dot{\gamma}_0$$

Elementele cu pragul de tensiune depășit ($\gamma > \dot{\gamma}_{0i}$) vor fi solicitate fiecare de o tensiune $\eta_i \dot{\gamma}_{0i}$, iar ansamblul acestora de

$$\int_0^{\dot{\gamma}} \dot{\gamma}_0 f(\dot{\gamma}_0) d\dot{\gamma}_0$$

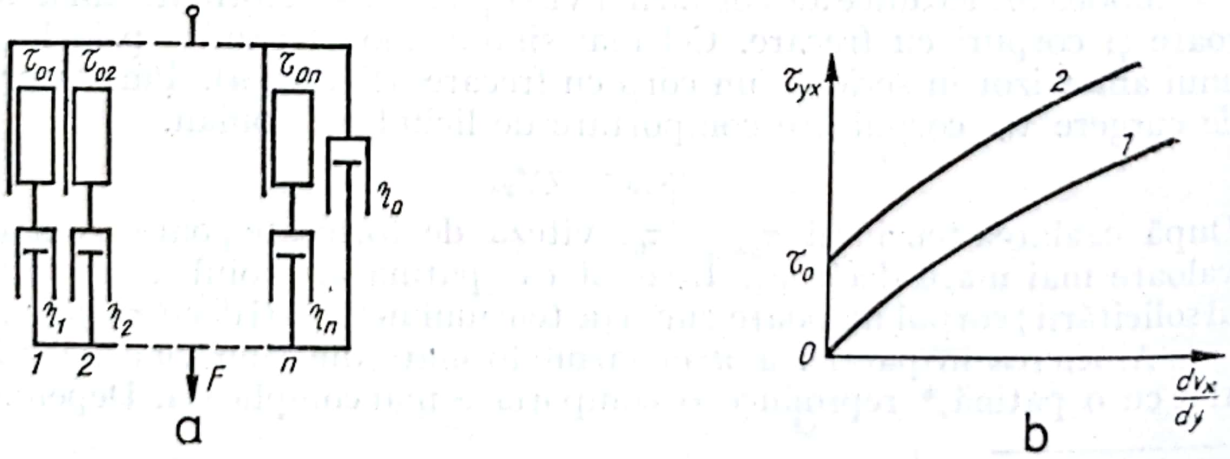


Fig. 6.5. Modelul corpului vîscoplastic cu n elemente.

Tensiunea totală ce solicită întregul model (fig. 6.5,*a*) va fi dată de suma

$$\tau = \eta_0\dot{\gamma} + \dot{\gamma}\int_{\dot{\gamma}}^{\infty} f(\dot{\gamma}_0)\,d\dot{\gamma}_0 + \int_0^{\dot{\gamma}} \dot{\gamma}_0 f(\dot{\gamma}_0)\,d\dot{\gamma}_0 \tag{6.10}$$

sau pentru modelul cu o patină liberă

$$\tau = \tau_0 + \dot{\gamma}\int_{\dot{\gamma}}^{\infty} f(\dot{\gamma}_0)\,d\dot{\gamma}_0 + \int_0^{\dot{\gamma}} \dot{\gamma}_0 f(\dot{\gamma}_0)\,d\dot{\gamma}_0 \tag{6.11}$$

Spectrul pragurilor vitezelor de forfecare $f(\dot{\gamma}_0)$ se determină din date experimentale.

Un amortizor legat în paralel cu un corp cu frecare, conform fig. 6.6, *a* sub acțiunea unei forțe crescătoare se manifestă ca un solid rigid, iar peste pragul de tensiune τ_0 are comportare de lichid newtonian (fig. 6.6, *b*). Corpul se numește *plasticul Bingham*. Ecuația reologică are forma

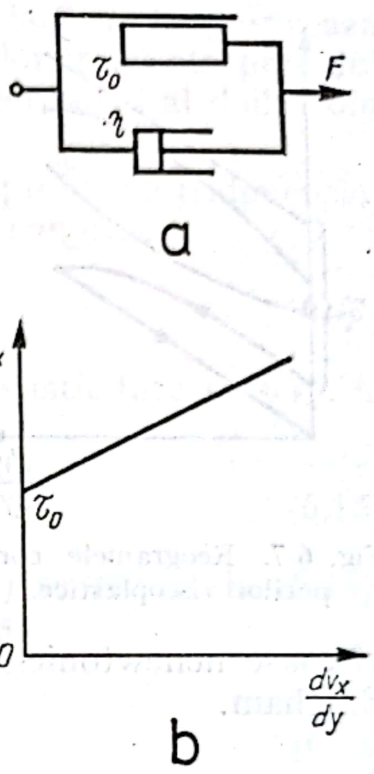


Fig. 6.6. Modelul corpului vîscoplastic cu două elemente în paralel.
a — modelul mecanic; *b* — curba răspuns.

$$\tau_{yx} - \tau_0 = \eta_p \frac{dv_x}{dy} \quad \text{pentru} \quad \tau_{yx} > \tau_0 \tag{6.12}$$

în care η_p este vîscozitatea plastică sau mobilitatea [2].
Comportarea de plastic Bingham este caracteristică suspensiilor.

Modelul mecanic obținut prin dispunerea în serie a unei infinități de elemente compuse dintr-un amortizor și un corp cu frecare legate în paralel, reproduce curba *1* sau *2* din figura 6.5, funcție de elementul liber înseriat; amortizor sau, respectiv, patină. Astfel se demonstrează și echivalența modelelor mecanice.

6,3,2. MODELE REOLOGICE

Modelele mecanice, după cum rezultă din paragraful anterior au servit la obținerea unor ecuații reologice. Unele dintre acestea ca de exemplu ecuația plasticului Bingham [v. ec. (6.12)] au o bază empirică. Prin corelarea datelor experimentale s-au obținut și alte modele.

Scanned with OKEN Scanner

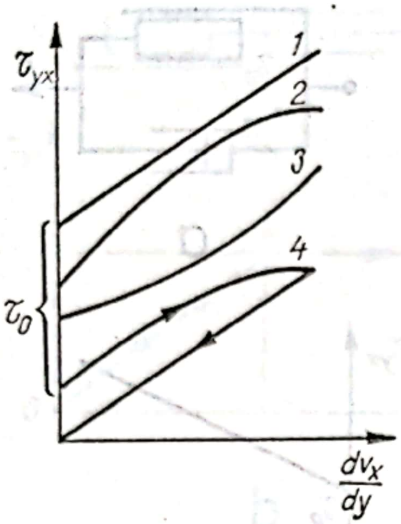


Fig. 6.7. Reogramele corpurilor vîscoplastice.

Principalele tipuri de comportări vîscoplastice sînt prezentate în fig. 6.7. Toate corpurile sînt cu prag de curgere τ_0. Linia *1* corespunde plasticului Bingham, liniile *2* și *3* reprezintă comportări plastice neliniare ce prezintă fenomenul de fluidificare și, respectiv, de îngroșare, iar linia *4* cu buclă de histerezis este a unui plastic tixotrop. Cîteva modele reologice propuse pentru lichidele vîscoplastice sînt date în tabelul 6.1. Ele sînt valabile pentru forfecare simplă și pot servi la abordarea teoretică a problemelor unidimensionale.

Modelul plasticului Bingham conține două constante reologice: pragul de curgere τ_0 și vîscozitatea plastică η_p. Prin analogie cu fluidele vîscoase newtoniene se definește o vîscozitate aparentă a plasticului Bingham.

$$\eta_p = \frac{\tau_{yx}}{\frac{dv_x}{dy}} = \eta + \frac{\tau_0}{\frac{dv_x}{dy}} \qquad (6.13)$$

Tabelul 6.I

Modele reologice pentru corpuri vîscoplastice

Denumirea modelului	Modelul reologic	Constante reologice
Plasticul Bingham	$\tau_{yx} - \tau_0 = \eta_p \frac{dv_x}{dy}$	τ_0 și η_p
Herschel-Bulkley	$\tau_{yx} - \tau_0 = \left[\eta' \frac{dv_x}{dy}\right]^{1/m}$	τ_0, η' și m
Analogul De Haven	$\tau_{yx} - \tau_0 = \frac{\eta_0}{1 + k_1(\tau_{yx} - \tau_0)^n} \left(\frac{dv_x}{dy}\right.$	τ_0, η_0 k_1 și n
Crowley-Kitzes	$\tau_{yx} = \eta_l \left[\frac{1{,}2 + C\,(k_2\tau_{yx}^{-0.2} + 1)^3}{1{,}2 - 2C\,(k_2\tau_{yx}^{-0.2} + 1)^3}\right]\left(\frac{dv_x}{dy}\right)$	η_l și k_2
Casson	$\tau_{yx}^{0,5} - \tau_0^{0,5} = k_3 \left(\frac{dv_x}{dy}\right)^{0,5}$	τ_0 și k_3

Scanned with OKEN Scanner

a cărei valoare descreşte cu creşterea vitezei de forfecare. Cunoaşterea valorilor η_p a unui lichid vîscoplastic este inutilă dacă nu se precizează şi viteza de forfecare corespunzătoare. Pentru valori mici ale pragului de curgere şi valori mari ale vitezei de forfecare, termenul al doilea din (6.13) se poate neglija.

Oldroyd a generalizat ecuaţia lui Bingham la probleme tridimensionale [2]. Pentru solicitare unidirecţională s-a pus condiţia

$$|\tau_{yx}| > \tau_0 \tag{6.14}$$

În cazul general, pentru tensorul τ, condiţia de plasticitate se scrie în forma

$$f(\tau) > \tau_0 \tag{6.15}$$

Există numeroase funcţii f prin care relaţia (6.15) se reduce la (6.14). A fost utilizată condiţia de plasticitate a lui Mises

$$\frac{1}{2}(\tau:\tau) > \tau_0^2 \tag{6.16}$$

în care $\tau:\tau$ este produsul scalar al tensorului tensiunilor sau al doilea invariant $I_{\tau 2}$ [v.ec.(1.28)] al tensorului tensiunilor*.

Oldroyd defineşte plasticul Bingham ca un corp ce respectă condiţia de plasticitate a lui Mises

$$\dot{\gamma} = 0 \text{ dacă } \frac{1}{2}(\tau:\tau) \leqslant \tau_0^2 \tag{6.17}$$

Mai departe, rezultă

$$\tau = \frac{2\eta_p}{1 - \dfrac{\tau_0}{\left[\dfrac{1}{2}(\tau:\tau)\right]^{1/2}}}\dot{\gamma} \tag{6.18}$$

valabilă cînd

$$\frac{1}{2}(\tau:\tau) > \tau_0^2 \tag{6.19}$$

---

* Componentele produsului $(\tau:\tau)$ formează al doilea invariant al tensorului tensiunilor I_{τ_2}.

Scanned with OKEN Scanner

Fracția din ecuația (6.18) reprezintă vîscozitatea aparentă a plasticului Ea are valori cuprinse între infinit, pentru $\frac{1}{2}(\tau:\tau) = \tau_0^2$ și η_p, cînd $\frac{1}{2}(\tau:\tau)$ are valori mari.

Cu respectarea condiției (6.19), ecuația (6.18) poate fi transcrisă într-o altă formă

$$\tau = 2\left[\eta_p + \frac{\tau_0}{\left[\frac{1}{2}(\dot{\gamma}:\dot{\gamma})\right]^{1/2}}\right]\dot{\gamma} \tag{6.20}$$

sau funcție de componentele scalare

$$\tau_{ij} = 2\left[\eta_p + \frac{\tau_0}{\left(\frac{1}{2}I\right)^{1/2}}\right]\dot{\gamma}_{ij} \tag{6.21}$$

în care $I_{\gamma 2}$ este al doilea invariant al tensorului vitezelor de forfecare, a cărui expresie este dată în tabelul 4.2.

Ecuațiile (6.18), (6.20) sau (6.21) reprezintă modelul generalizat al plasticului Bingham. Pentru solicitări la forfecare simplă, din ecuația (6.21) se obține ecuația (6.12).

Plasticul Bingham are comportare liniară, întrucît viteza de forfecare este o funcție liniară de tensiune. Din fig. 6.7 rezultă că există materiale al căror răspuns la solicitări este neliniar. *Modelul Herschel-Bulkley* descrie comportările neliniare și pe cele liniare

$$\tau_{yx} - \tau_0 = \left(\eta' \frac{dv_x}{dy}\right)^{1/m} \tag{6.22}$$

El are o formă echivalentă cu legea Ostwald — de Waele, dar conține trei constante reologice. Funcție de valorile exponentului m, se obțin comportările corespunzătoare liniilor 1—3 din fig. 6.7.

— Pentru $m < 1$, curba *3*; comportare neliniară;

— Pentru $m > 1$, curba *2*; comportare neliniară;

— Pentru $m = 1$, dreapta *1*; comportare liniară.

Constantele reologice se obțin din datele experimentale. Pragul de tensiune τ_0 se obține direct din reogramă, iar constantele η' și m din reprezentarea logaritmică a vitezei de forfecare $\dot{\gamma}_{yx}$ — funcție de $\tau_{yx} - \tau_0$.

Analogul modelului De Haven (v. tab. 6.1) are patru constante reologice. Față de modelul anterior, el conține vîscozitatea lichidului η_0 la viteza de forfecare zero. Valoarea ei se obține din panta curbei la

Scanned with OKEN Scanner

viteză de forfecare zero. Constantele n și k rezultă prin reprezentarea grafică a ecuației

$$\lg\left[\left(-\frac{dv_x}{dy}\right)\frac{\eta_0}{\tau_{yx}-\tau_0}-1\right]=\log k_1+n\log(\tau_{yx}-\tau_0) \tag{6.23}$$

Modelul Crowley — Kitzes a fost propus pentru suspensii apoase de oxid de thoriu. Din această cauză conține concentrația volumică a solidului C, viscozitatea lichidului η_l și o constantă k_2 (v. tab.6.1). Valoarea pragului de tensiune corespunde tensiunii de forfecare pentru care viteza de forfecare este egală cu zero. Deci, la $(dv_x/dy) = 0$, rezultă $\tau_{yx} = \tau_0$. Cu aceste condiții, din expresia modelului se obține

$$\tau_0=\left[\frac{k_2}{(1{,}2/2C)^{1/3}-1}\right]^5 \tag{6.24}$$

în care constanta k_2 este independentă de concentrație.

Modelul Casson descrie comportarea reologică a cernelurilor tipografice și a sîngelui. El conține două constante empirice: pragul de tensiune τ_0 și constanta k_3, ale căror valori se obțin prin reprezentarea grafică a datelor experimentale.

BIBLIOGRAFIE

1. CATCHANOV, L., *Éléments de la théorie de la plasticité*, Moscou, Editions Mir, 1975.
2. FREDRICKSON, A. G., *Principles and applications of rheology*, Englewood Cliffs, N. J., Prentice-Hall, Inc., 1964
3. LENK, R. S., *Plastics rheology*, London, Maclaren and Sons, 1968.
4. POPPEL, EM. *Rheologie und elektrokinetische Vorgänge in der Papier technologie*, Leipzig, VEB Fachbuchverlag, 1977.
5. SCOTT BLAIR, G. W., *Elementary rheology*, London, Academic Press, 1969.
6. SHERMAN, P., *Industrial rheology*, London, Academic Press, 1970.
7. TUDOSE, R. Z. și LUNGU, M., In: Mat. Plast., București, VII, p. 240, 1970.
8. TUDOSE, R. Z., POPOVICI, L., NAFORNIȚĂ, G. și FARAON, C., In: Mat. Plast. București, 15, p. 206, 1978.
9. TUDOSE, R., POPOVICI, L. și COBZARIU, N., In: Bul. Inst. Polit. Iași, XXV (XXIX), Fasc. 3—4, S. II, p. 51, 1979.
10. ZANGGER, R. *Rhéologie des suspensions*, In: La Rheologie. Recueil de travaux des session de perfectionnement. Nr. 3, Paris, Masson et Cie, 1969.

Scanned with OKEN Scanner

7

CORPURI ELASTOPLASTICE*

7.1. INTRODUCERE

Numeroase materiale solide se comportă elastoplastic. Supuse la solicitări, pînă la o anumită limită, se deformează elastic. Peste valoarea critică a solicitării apar deformații remanente, ca urmare a fenomenului de fluaj. În sfera compușilor macromoleculari astfel de comportări apar la materiale plastice, cauciuc și fibre sintetice.

Comportările elasto-pur plastică și elastoplastică cu ecruisare s-au reprezentat în fig. 7.1, *a*, liniile *1* și respectiv *2*. Pragul de tensiune τ_0 desparte domeniul perfect elastic de domeniul plastic. Comportarea

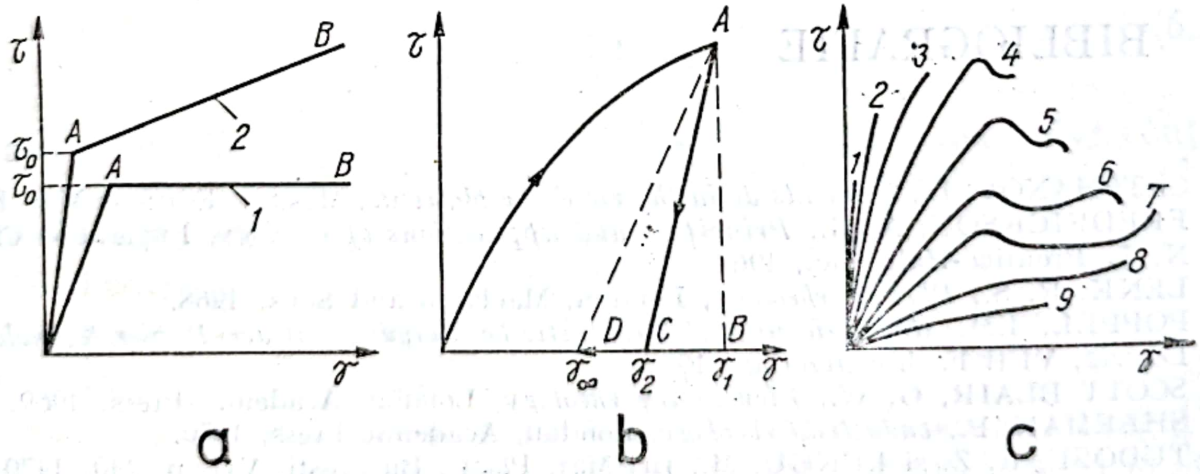


Fig. 7.1. Corpuri elastoplastice:
a — liniar; *b* — neliniar; *c* — diverse tipuri de curbe reale.

* Termen folosit de școala franceză de reologie [5, 6]. Se mai folosește și termenul elastovîscos [2, 3].

liniară nu este caracteristică corpurilor reale, decît pe domenii limitate de solicitare. Materialele reale au comportare elastoplastică [1, 5, 6] sau elastovîscoasă [2,3] neliniară (fig. 7.1, *b*). Curbele de încărcare și descărcare sînt diferite. La solicitarea corpului, în punctul *A*, corespunde deformația γ_1. În timpul descărcării, după *AC*, o parte din deformație se recuperează instantaneu, iar o altă parte se recuperează lent, în timp. Final, corpul prezintă deformația remanentă γ_∞. Suprafața *OAD* este o măsură a energiei disipate în timpul solicitării.

Răspunsul materialelor elastoplastice la solicitări de tracțiune depinde de natura, compoziția și structura lor. În fig. 7,1 *c* sînt reprezentate mai multe tipuri de dependențe între tensiune și deformație. Numeroase materiale reale — metale și compuși macromoleculari în stare solidă — prezintă curbe de acest tip.

Polimerii termorigizi, datorită reticulării, au o comportare *fragilă* sau *casantă* și prezintă curbe de tipul *1—3*. Curba *1* corespunde unei comportări perfect elastice, iar curbele *2* și *3* unor corpuri ce prezintă și un ușor fluaj [3]. Materialele cu comportare rigidă au curbe la care ruperea are loc după începutul strangulării epruvetei (curba *4*), aproape de sfîrșitul stabilizării (curbele *5* și *6*) sau după terminarea stabilizării și apariția unei noi instabilități (curba *7*). Curbele *8* și *9* sînt caracteristice unor materiale pentru care diferențierea între deformația elastică și fluaj este incertă; fluajul este predominant în special în cazul curbei *9*.

Reologia tinde să considere materia ca o stare fluidă generalizată. Punctele de tranziție care marchează cîteva discontinuități, prin modificarea volumului liber sau (și) a conținutului de căldură, nu trebuie să minimalizeze conceptul de stare fluidă generalizată. Așa cum arată Lenk [3], argumentul cel mai evident în favoarea acestui concept, îl constituie analogia perfectă între curbele $\tau - \gamma$ pentru solide și $\tau - \dot{\gamma}$ pentru lichide, dacă acestea se trasează pe un domeniu suficient de larg al parametrilor solicitării. Curba generalizată de deformare a solidelor, (fig. 7.2, curba *1*), este identică cu curba generalizată de curgere [v. fig. (4.13)].

În mod curent, rezultatele încercărilor la tracțiune se reprezintă sub o formă convențională, obținîndu-se curbe de tipul *2*, (fig. 7.2). Diferența între curbe rezultă din modul diferit de raportare a forței — la suprafața secțiunii inițiale (*2*) sau la secțiunea reală (*1*).

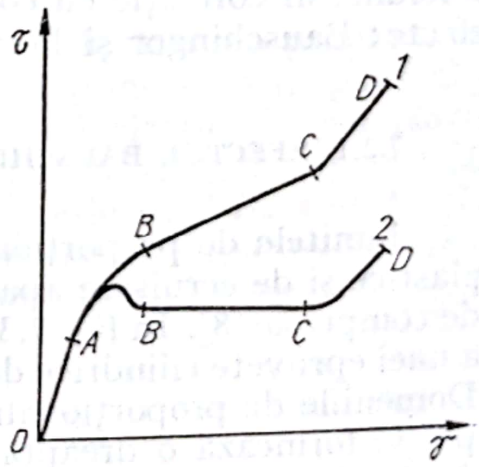


Fig. 7.2. Curba generalizată tracțiune — deformație pentru corpuri elastoplastice.

Pentru deformații mici este valabilă legea lui Hooke. Modulul de elasticitate este constant pe domeniul liniar al curbei, cuprins între O și A. În domeniul deformațiilor mari, modulul aparent va avea valori mai mici decît modulul inițial. Începînd din punctul A apare o „înmuiere" a materialului, similară cu fluidificarea lichidelor pseudoplastice.

Pe intervalul AB, la deformația corespunzătoare maximului de pe curba *2*, proba se va strangula în locul unei imperfecțiuni, unde rezistența prezintă o abatere negativă de la valoarea medie. Atunci cînd s-a format strangularea, sub acțiunea solicitării, epruveta fie că se strangulează mai puternic și apoi se rupe (v. curba *4*, fig. 7.1,*c*), fie că strangularea se stabilizează la secțiune transversală constantă, iar lungimea strangulării crește pînă se consumă tot materialul netensionat din probă. Ultimul proces, numit tragere la rece sau etirare, are loc pe intervalul BC și este aplicat în industria fibrelor sintetice.

Începînd din punctul C, la solicitări mari proba prezintă o „rigidizare" similară cu creșterea vîscozității lichidelor dilatante. Dacă solicitările pînă în punctul C, au fost de ordinul forțelor coezive secundare, după acest punct ele devin egale cu forțele legăturilor intermoleculare. Sub acțiunea solicitării apare din nou o stare de instabilitate a materialului, o strangulare, și în punctul D se rupe.

7.2. EFECTE SPECIFICE CORPURILOR ELASTOPLASTICE

În legătură cu solicitarea acestor corpuri la tracțiune, compresie sau torsiune, în corelație cu componenta elastică și plastică, se cunosc două efecte: Bauschinger și Poynting.

7.2.1. EFECTUL BAUSCHINGER

Limitele de proporționalitate și elasticitate, domeniul deformațiilor plastice și de ecruisare apar, atît la solicitările de tracțiune, cît și la cele de compresie [8]. În fig. 7.3 s-a reprezentat diagrama tensiune-deformație a unei epruvete cilindrice de oțel, solicitată axial la tracțiune și compresie. Domeniile de proporționalitate OA pentru tracțiune și OA_1 pentru compresie formează o dreaptă continuă. Punctele A și A_1 sînt *limitele de proporționalitate*, între care este valabilă legea lui Hooke. La tensiuni mai mari se formează domeniile neliniare AB și A_1B_1 în care deformațiile mai sînt reversibile. Peste *limitele de elasticitate* sau *limitele de curgere*,

Scanned with OKEN Scanner

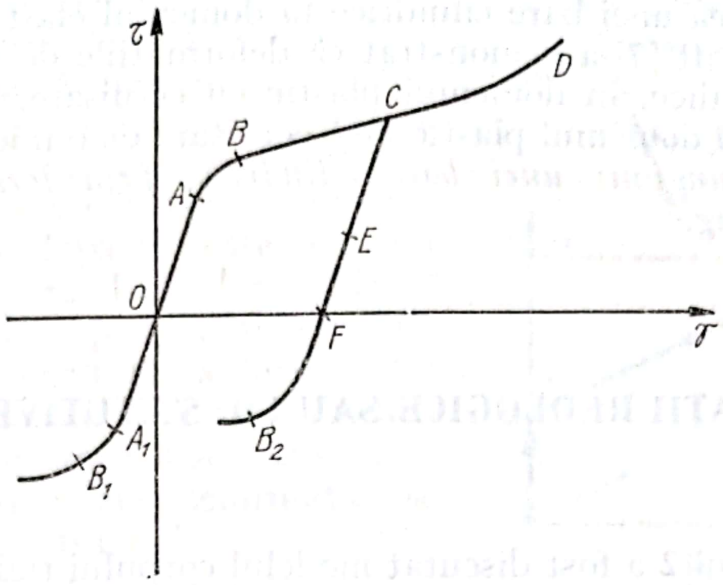


Fig. 7.3. Reograma tracțiune — compresie — deformație. Efectul Bauschinger.

reprezentate de punctele B și B_1, efectele sînt ireversibile. Crescînd efortul din B în C și apoi descărcînd parțial corpul, se va obține linia CE. Aceasta este aproximativ dreaptă și paralelă cu dreapta OA. La o nouă încărcare din punctul E se obține aceeași dreaptă EC

Proprietatea fundamentală a corpurilor plastice constă în apariția deformațiilor remanente. Solicitările care depășesc limita de elasticitate vor provoca deformații ireversibile, ale căror funcții $\tau = f(\gamma)$, pentru încărcare și descărcare, nu mai coincid.

Limitele de proporționalitate și elasticitate, deformațiile plastice și ecruisarea sînt evidente, atît la solicitările de tracțiune, cît și la cele de compresie, iar diagramele sînt simetrice (fig. 7.3). Această simetrie nu se păstrează la toate corpurile.

Limita de elasticitate la compresie, pentru încărcarea primară, este reprezentată de punctul B_1. Solicitarea la tracțiune pînă în punctul C, urmată de descărcare și compresie în domeniul elastic și apoi plastic, curba $CEFB_2$, va pune în evidență limita de elasticitate reprezentată de punctul B_2. Limitele de elasticitate la compresie B_1 și B_2 sînt diferite. *Efectul variației limitei de elasticitate la compresie, după solicitarea la tracțiune în domeniul plastic, se numește efectul Bauschinger.*

7.2.2. EFECTUL POYNTING

Barele din materiale elastoplastice solicitate la torsiune pot prezenta deformații reversibile sau ireversibile, funcție de mărimea solicitării. Deformațiile în domeniul plastic pot fi însoțite de ecruisare.

Scanned with OKEN Scanner

Torsionarea unei bare cilindrice în domeniul elastic este însoțită de o scurtare. Swift [7] a demonstrat că deformațiile de torsiune a barelor cilindrice metalice, în domeniul plastic cu ecruisare, sînt însoțite de o alungire, iar în domeniul plastic fără ecruisare de o micșorare a lungimii. *Modificarea lungimii unei bare cilindrice, prin torsionare, constituie efectul Paynting.*

7.3. ECUAȚII REOLOGICE SAU CONSTITUTIVE

În capitolul 2 a fost discutat modelul corpului rigid-perfect plastic. Considerarea componentei elastice completează gama proprietăților solidelor reale și conduce la o vedere de ansamblu asupra modelelor reologice.

Modelele mecanice ale corpurilor elastoplastice sînt formate din resoarte și corpuri cu frecare, legate în serie sau în paralel. Înserierea unui arc cu o patină formează modelul corpului *elastoperfect plastic* (fig. 7.4). Forța F aplicată modelului va produce, în prima etapă, o deformație elastică. Deformarea resortului are loc pînă la egalarea forței de frecare a patinei, echivalentă pragului de tensiune τ_0. După atingerea pragului de tensiune, punctul A, deformația arcului rămîne constantă și patina începe să alunece.

Forța nu mai poate crește, deoarece patina are rolul unui limitator de solicitare. Dacă în B corpul se descarcă, partea elastică a deformației se recuperează. Segmentele $EA = CD$ reprezintă deformația elastică, iar deformația plastică ireversibilă este reprezentată de segmentele $AB = OC$.

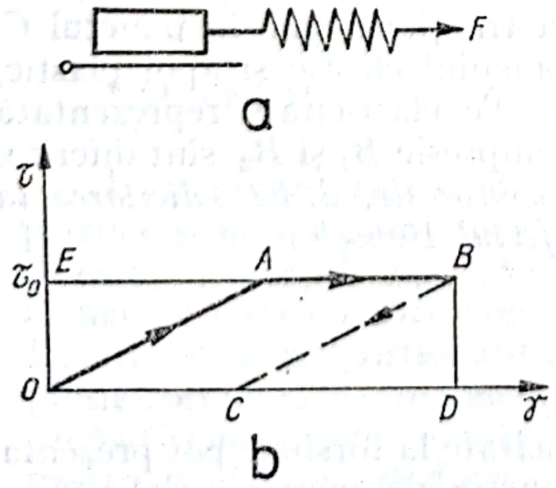


Fig. 7.4. Modelul mecanic al corpului elastic-perfect plastic.

Forțele ce acționează asupra componentelor modelului sînt egale și pentru deformația totală se poate scrie

$$\gamma = \gamma_H + \gamma_{St.v}$$

suma deformațiilor: γ_H — elastică și $\gamma_{St.v}$ — plastică.

— Pentru $\tau < \tau_0$, rezultă

$$\gamma_{St.v} = 0 \text{ și } \gamma = \gamma_H = \tau/G;$$

— Pentru $\tau = \tau_0$, se obține

$$\gamma = (\tau_0/G) + \gamma_{St.v} \qquad (7.1)$$

Scanned with OKEN Scanner

Deformația plastică poate avea orice valoare cuprinsă între zero și infinit.

Modelul cu două elemente cuplate în paralel (fig. 7.5) reproduce comportarea *rigid-plastică cu ecruisare liniară* [9,10]. O forță continuu crescătoare va produce deformații numai după ce este depășit pragul de tensiune τ_0. Din A pînă în B are loc o deformare parțial reversibilă. Prin diminuarea treptată a forței, din punctul B, deformația rămîne nemodificată. După ce tensiunea a scăzut cu $2\tau_0$, punctul D, o parte din deformație se recuperează, segmentul FE.

Conform modelului, deformațiile corespunzătoare ambelor elemente sînt egale, iar tensiunile diferă

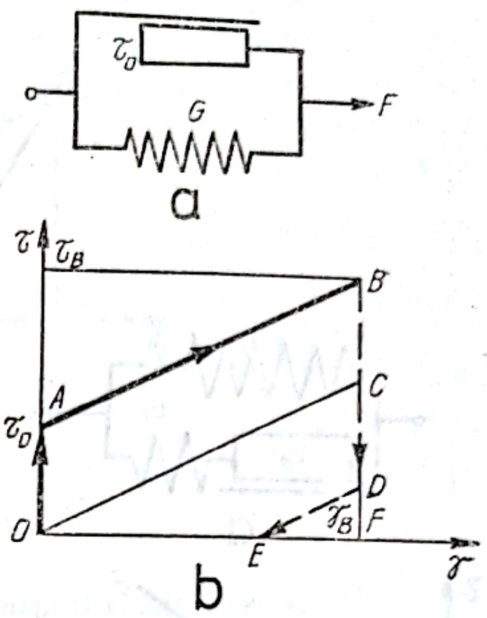


Fig. 7.5. Modelul mecanic al corpului rigid — plastic ecruisabil.

$$\tau = \tau_0 + \tau_e$$

— pentru $\tau < \tau_0$, rezultă $\gamma = 0$
— pentru $\tau \geqslant \tau_0$, se obține

$$\tau - \tau_0 = G\gamma \tag{7.2}$$

Condiția ca o parte din deformație să fie recuperată este $\tau > 2\tau_0$. Începînd din punctul B, tensiunea descrește. Corpul cu frecare rămîne blocat pînă ce tensiunea se diminuează cu $2\tau_0$, după care urmează recuperarea. Corelația între tensiune și deformație în sens descrescător este dată de relația

$$\tau_B - 2\tau_0 - \tau = G(\gamma_B - \gamma) \tag{7.3}$$

în care τ_B și γ_B sînt parametrii solicitării în punctul B (v. fig. 7.5,*b*).

Corpul elastoplastic, liniar ecruisabil, este reprezentat în fig. 7.6. Modelul mecanic supus la o forță de tracțiune reproduce o comportare liniară. Pînă în punctul A deformația este reversibilă. Cînd solicitarea depășește pragul de tensiune τ_0, segmentul AB, apar deformații nerecuperabile. Modelul reologic al acestui corp are forma

$$\tau = (G_1 + G_2)\gamma \text{ pentru } \tau < \tau_0 \tag{7.4}$$

$$\tau - \tau_0 = G_2\gamma \text{ pentru } \tau \geqslant \tau_0 \tag{7.5}$$

în care G_1 și G_2 sînt modulii de elasticitate corespunzători celor două resoarte.

Scanned with OKEN Scanner

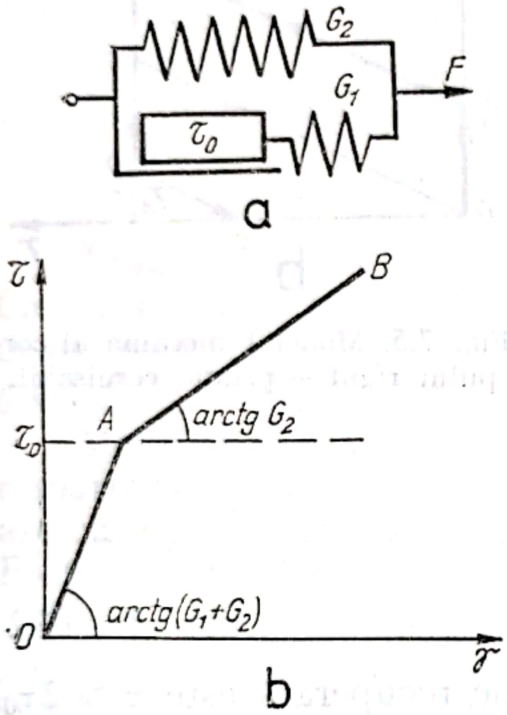


Fig. 7.6. Modelul mecanic al corpului elastoplastic ecruisabil.

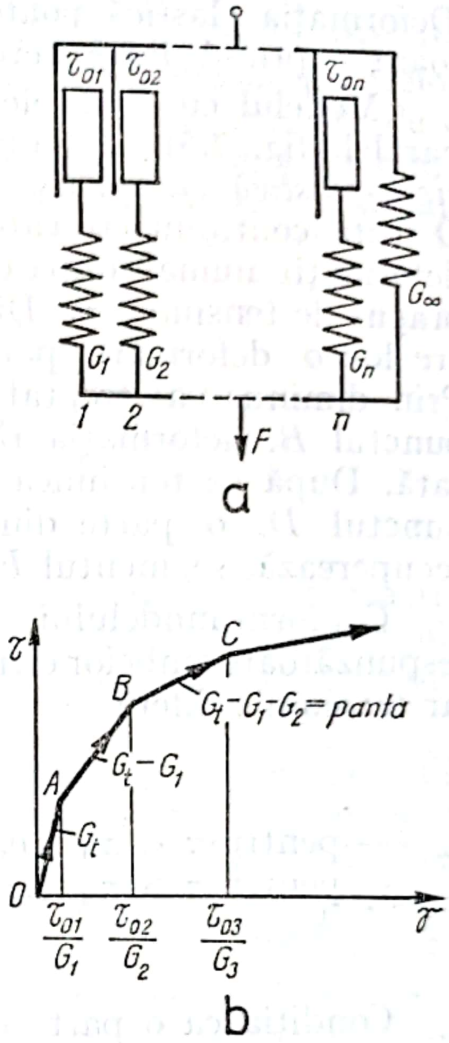


Fig. 7.7. Modelul mecanic cu n elemente în paralel.

Modelele mecanice formate din două sau trei elemente descriu comportarea elastoplastică liniară. Asocierea în paralel a mai multor elemente (fig. 7.7), conduce la un *model generalizat*. Cînd numărul elementelor tinde la infinit, răspunsul va fi format dintr-o curbă continuă.

Se consideră un model format din n elemente legate în paralel. Fiecare element se obține prin înserierea unui resort cu o patină. La acestea se mai asociază un arc izolat, ceea ce echivalează cu un cuplu resort — patină, cu valoarea pragului de tensiune infinită.

Elementele sînt sistematizate în ordinea crescătoare a rapoartelor τ_0/G.

Răspunsul la o forță continuu crescătoare este o linie frîntă formată din n segmente (fig. 7.7,*b*). Pe intervalul OA toate resoartele se alungesc. Panta dreptei este dată de

$$G_t = \sum_{i=1}^{n} G_i + G_\infty \tag{7.6}$$

Scanned with OKEN Scanner

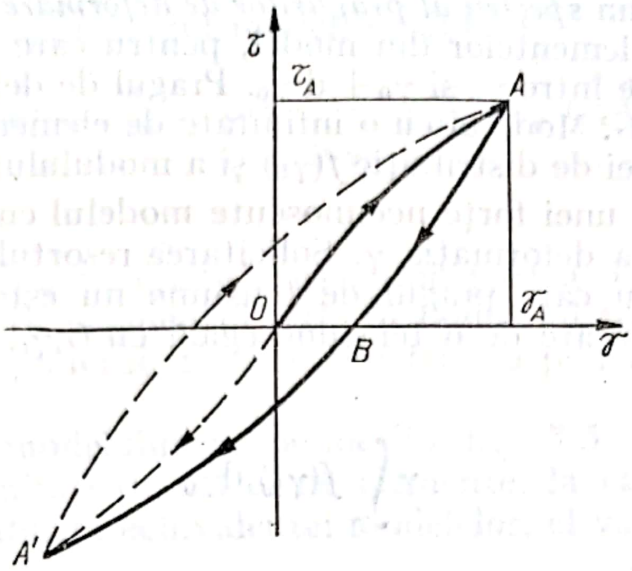


Fig. 7.8. Curba efort — deformație pentru corpuri elastoplastice.

În punctul A, pragul de tensiune τ_{01} al primei patine este atins, patina glisează, lungimea resortului corespunzător rămîne constantă și dreapta AB va avea panta

$$G_t - G_1 = \sum_{i=2}^{n} G_i + G_\infty \tag{7.7}$$

Următoarele segmente vor avea panta descrescătoare și pentru segmentul n rezultă

$$G_t - \sum_{i=1}^{n} G_i = G_\infty \tag{7.8}$$

În continuare, corpul se descarcă treptat, toate patinele rămîn imobile și linia descrescătoare va avea panta egală cu G_t. După ce deformația scade cu $2\tau_{01}/G_1$ și începe să lunece în sens invers prima patină, noul segment de dreaptă va avea panta $G_t - G_1$. Linia descrescătoare formată din n segmente, ce se obține prin diminuarea forței, este transformata omotetică* a liniei crescătoare, în raportul — 2.

O reproducere mai fidelă a comportării corpurilor elastoplastice se obține prin generalizarea modelului mecanic din figura (fig. 7.7). La o infinitate de elemente se obține o curbă continuă (fig. 7.8).

---

* Omotetia reprezintă transformarea geometrică punctuală definită de un punct fix O, numit centrul omotetiei și de un număr real k numit puterea omotetiei. Transformatul omotetic al unui punct M este punctul M' situat pe dreapta OM, pe care este determinat de relația $OM' = kOM$ [4].

Se definește un *spectru al pragurilor de deformare* $f(\gamma_0)$ ce reprezintă suma modulilor elementelor din model, pentru care pragurile de deformare sînt cuprinse între γ_0 și $\gamma_0 + \mathrm{d}\gamma_0$. Pragul de deformare este dat de raportul $\gamma_0 = \tau_0/G$. Modelul cu o infinitate de elemente este caracterizat cu ajutorul funcției de distribuție $f(\gamma_0)$ și a modulului G_∞.

Sub acțiunea unei forțe necunoscute modelul cu o infinitate de elemente va prezenta deformația γ. Solicitarea resortului izolat va fi $G_\infty\gamma$. Elementele pentru care pragul de tensiune nu este depășit ($\gamma < \gamma_{0i}$), vor fi solicitate fiecare de o tensiune egală cu $G_i\gamma_i$, sau ansamblul elementelor

$$\gamma\int_{\gamma}^{\infty} f(\gamma_0)\,\mathrm{d}\gamma_0$$

Elementele cu pragul de tensiune depășit ($\gamma > \gamma_{0i}$) vor fi solicitate fiecare de o tensiune $G_i\gamma_{0i}$, iar asamblul acestora de

$$\gamma\int_{0}^{\gamma} \gamma_0 f(\gamma_0)\,\mathrm{d}\gamma_0$$

Tensiunea totală ce solicită toate elementele va fi dată de suma

$$\tau = G_\infty\,\gamma + \gamma\int_{\gamma}^{\infty} f(\gamma_0)\,\mathrm{d}\gamma_0 + \int_{0}^{\gamma} \gamma_0 f(\gamma_0)\,\mathrm{d}\gamma_0. \qquad (7.9)$$

Funcția $f(\gamma_0)$ se determină pe cale experimentală [5].

În coordonate $\tau - \gamma$ ecuația descrie curba OA (v. fig. 7.8), a cărei pantă, în origine, este G_i [v. ec. (7.6)]. Curba descrescătoare AB, corespunzătoare descărcării modelului, este transformata omotetică a liniei crescătoare și are, în punctul A, panta egală cu G_i. În prima fază a descărcării, tensiunea scade de la τ_A la $\tau_A - \tau$. Asupra resortului izolat acționează tensiunea $G_\infty(\gamma_A - \gamma)$. Elementelor cu pragul de tensiune net depășit [$(\gamma_A - \gamma) < 2\gamma_0$] le revine tensiunea

$$(\gamma_A - \gamma)\int_{(\gamma_A-\gamma)/2}^{\infty} f(\gamma_0)\,\mathrm{d}\gamma_0$$

și pentru elementele cu pragul de tensiune depășit [$(\gamma_A - \gamma) > 2\gamma_0$]

$$2\int_{0}^{(\gamma_A-\gamma)/2} \gamma_0 f(\gamma_0)\,\mathrm{d}\gamma_0$$

Scanned with OKEN Scanner

Prin însumare, pentru întregul model, se obține

$$\tau_A - \tau = G_\infty(\gamma_A - \gamma) + (\gamma_A - \gamma)\int_{(\gamma_A-\gamma)/2}^{\infty} f(\gamma_0)\,d\gamma_0 + 2\int_0^{(\gamma_A-\gamma)/2} \gamma_0 f(\gamma_0)\,d\gamma_0 \tag{7.10}$$

După descărcarea completă a corpului, partea de deformație nerecuperată este dată de segmentul OB. În domeniul tensiunilor negative rezultă curba BA', punctul A' este simetric cu punctul A în raport cu originea.

Generalizarea modelului mecanic din fig. 7.5 se realizează prin înserierea unei infinități de astfel de elemente, la care se mai adaugă un resort izolat. Datorită echivalenței modelelor, el va produce curba din fig. 7.8.

BIBLIOGRAFIE

1. AMENZADE, YU.A., *Theory of elasticity*, Moscow, Mir Publishers, 1979.
2. JINESCU, V.V., *Proprietățile fizice și termomecanica materialelor plastice*, Vol. I și II, București, Editura tehnică 1979.
3. LENK, R. S., *Plastics rheology*, London, Maclaren and Sons, 1968.
4. * * * Lexiconul tehnic român, Vol. 11, București, Editura tehnică, 1962.
5. PERSOZ, B., *La Rhéologie*. Recueil de travaux des sessions de perfectionnement. Nr. 3, Paris, Masson et Cie, 1969.
6. PERSOZ, B., *Introduction à l'étude de la rhéologie*, Paris, Dunod, 1960.
7. REINER, M., *Deformation, strain and flow*, Second edition, London, H. K. Lewis and Co., Ltd., 1960.
8. SEDOV, L., *Mécanique des milieux continus*. Vol. I și II, Moscou, Edition Mir, 1975.
9. TEODORESCU, P. P. și ILLE, V., *Teoria elasticității și introducere în mecanica solidelor deformabile*, Vol. I, Cluj-Napoca, Editura Dacia, 1976.
10. TUDOSE, R. Z., *Procese și utilaje în industria de prelucrare a compușilor macromoleculari*, București, Editura tehnică 1976.

Scanned with OKEN Scanner

8

APLICAȚII ALE REOLOGIEI

8.1. INTRODUCERE

Modelele reologice sînt folosite de științele, teoretice sau aplicative, ce studiază deformarea și curgerea. Astfel, mecanica fluidelor, mecanica corpului elastic și mecanica corpului plastic au dezvoltat teoriile liniare pe baza modelelor reologice ale corpurilor cu proprietate unitară (v.cap.2). Mecanica fluidelor nenewtoniene, teoria elasticității neliniare și a plasticității neliniare fac apel la modelele reologice neliniare.

Pentru ingineria chimică deformarea elastică și plastică prezintă mai puțin interes. La baza majorității operațiilor unitare stă procesul de curgere. Pentru a-l descrie sînt necesare cinci grupuri de ecuații: ecuația continuității, ecuațiile impulsului, ecuația energiei, ecuațiile reologice și ecuația de stare. Ecuația energiei intervine numai în procesele neizoterme.

Problemele teoretice sînt abordate cu ajutorul grupului de ecuații menționat, luînd în considerație geometria spațiului de curgere și mecanismul de transfer al impulsului. Interesul cel mai mare îl prezintă următoarele tipuri de comportări reologice: vîscoasă, nenewtoniană, plastică (liniară sau neliniară) și vîscoelastică. În cele ce urmează vor fi prezentate aplicații ale modelelor reologice pentru comportările menționate; la cîteva cazuri de curgere, reprezentative pentru ingineria chimică. O asemenea problematică se încadrează în obiectul mecanicii fluidelor nenewtoniene.

8.2. CURGEREA IZOTERMĂ

Temperatura fluidelor în curgere se modifică, ca urmare a schimbului de căldură cu exteriorul sau datorită unor surse interne. Generarea căldurii în interiorul fluidului se datorează, în unele cazuri, unor procese

Scanned with OKEN Scanner

chimice sau fizice, dar totdeauna va interveni disiparea vîscoasă. Contribuția ultimei surse interne poate fi neglijată în cazul fluidelor cu vîscozitate mică, în regim de curgere laminar.

Curgerea prin spații cu secțiune circulară este comună unui număr mare de operații. Cea mai reprezentativă este curgerea prin conducte și capilare.

Se consideră un tub sau o capilară orizontală, cu secțiune circulară, prin care curge un fluid incompresibil. Axa z a sistemului de coordonate cilindrice coincide cu axa de simetrie a tubului, iar coordonata radială este r. La intrarea în tub, în zona de stabilizare a curgerii, viteza depinde de coordonata longitudinală și radială, $v_z = v_z\ (r, z)$, iar în zona stabilizată dependența se simplifică, $v_z = v_z(r)$.

În lungul traseului de curgere presiunea variază liniar. La intrare apare o cădere de presiune mărită. Căderea de presiune este considerabil mai mare la curgerea lichidelor vîscoelastice, decît în cazul lichidelor newtoniene. Acesta este efectul de intrare.

În zona de ieșire din tub, un lichid vîscoelastic manifestă fenomenul de umflare a jetului (v. 5.2.2). Deformația elastică se recuperează după ce jetul scapă de îngrădirea pereților tubului.

Distribuția presiunii în lungul traseului de curgere, începînd cu rezervorul și terminînd cu capătul de ieșire din tub, este reprezentată în fig. 8.1.

Variația totală a presiunii este formată din trei părți [8,9]

$$\Delta p = \Delta p_i + \Delta p_c + \Delta p_e \tag{8.1}$$

Căderea de presiune la intrarea în tub este formată din:

— căderea de presiune cauzată de disiparea vîscoasă, ca urmare a curgerii convergente în rezervor, spre capătul de intrare;

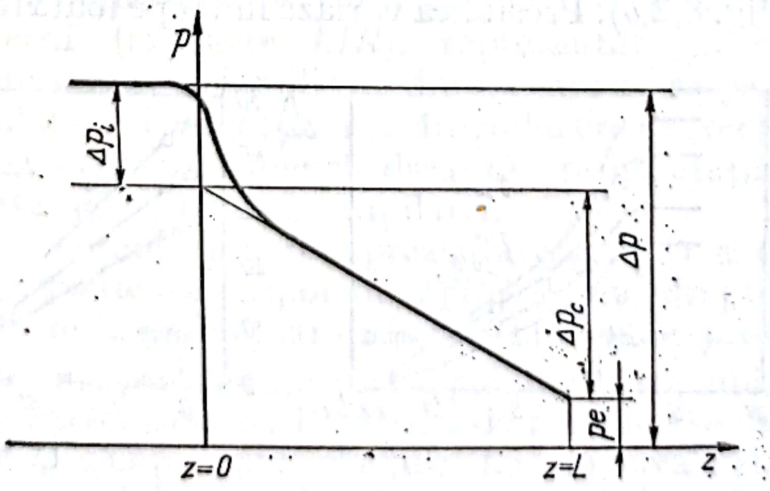


Fig. 8.1. Variația presiunii la curgerea unui lichid vîscoelastic prin capilară.

Scanned with OKEN Scanner

— căderea de presiune datorată disipării în zona de stabilizare a curgerii;

— căderea de presiune convertită în energie elastică înmagazinată, din care o parte este recuperată la ieșirea jetului din tub.

Scăderea presiunii în lungul tubului se datorește efectului de disipare vîscoasă.

La ieșirea din tub, presiunea lichidului p_e este mai mare decît presiunea mediului ambiant [10—15, 18, 20]. Cauza o constituie energia elastică înmagazinată ce se recuperează, cînd lichidul părăsește contactul cu pereții tubului. Măsurarea acestei presiuni nu este posibilă. Valoarea ei se obține prin extrapolarea măsurătorilor făcute în interiorul capilarei, în ipoteza unui gradient de presiune constant.

8.2.1. ZONA DE INTRARE

La intrarea fluidului din rezervor într-un tub profilul vitezelor se modifică, pînă se atinge distribuția corespunzătoare curgerii stabilizate. Lungimea tubului necesară atingerii stării stabilizate se numește lungime de stabilizare. Această lungime depinde de viteza fluidului, dimensiunea tubului și a rezervorului și de vîscozitatea și elasticitatea fluidului.

Cercetările efectuate de Han, Charles și Philippoff [11] cu lichide vîscoelastice și newtoniene au pus în evidență efecte de intrare distincte. La curgerea polietilenei de înaltă densitate, printr-o capilară cu raportul $(L/d) = 4$, la temperatura de 180°C, se constată o scădere importantă a presiunii în zona de intrare (fig. 8.2,*a*). Cu un fluid newtonian (Indopal H 1900), a cărui vîscozitate la temperatura camerei este (4500 P) de același ordin cu vîscozitatea topiturii de polietilenă, s-au obținut rezultate diferite (fig. 8,2,*b*). Presiunea variază liniar pe toată lungimea capilarei.

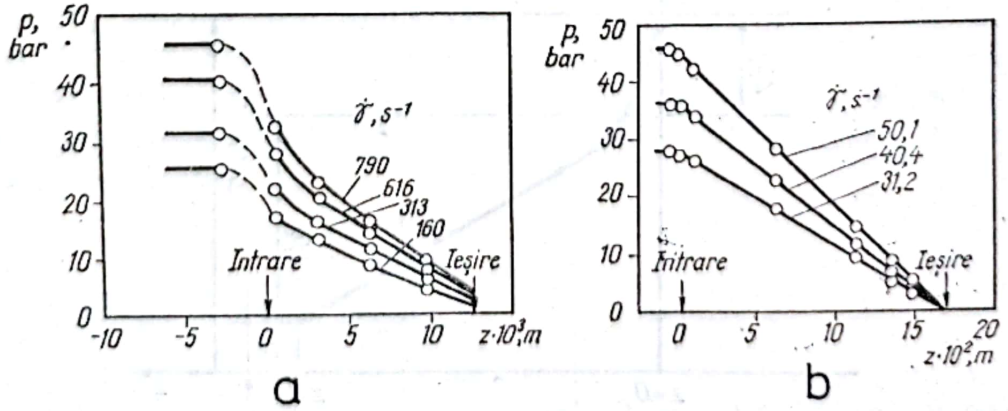


Fig. 8.2. Căderea de presiune la curgerea prin capilare:
a — lichid vîscoelastic; *b* — lichid newtonian.

Scanned with OKEN Scanner

Întrucît două lichide cu vîscozitate aproximativ egală, prezintă efecte de intrare diferite, cauza poate fi atribuită numai proprietății distincte. Aceasta nu poate fi alta decît componenta elastică a topiturii de polietilenă. Concluzia este justificată și de efectele de ieșire distincte. Topitura de polietilenă, la ieșirea din capilară, are o presiune mai mare de zero, datorită energiei elastice înmagazinată.

Efectul de intrare exprimat prin variația presiunii Δp_i, arbitrar se poate considera că este format din componenta elastică Δp_e și componenta vîscoasă Δp_v

$$\Delta p_i = \Delta p_e + \Delta p_v \tag{8.2}$$

Datele experimentale obținute cu topituri de polimeri au arătat că valoarea componentei vîscoase este mai mică decît 5% din Δp_e, demonstrînd că scăderea presiunii la intrare se datorește, în principal, componentei elastice, deci $\Delta p_i \simeq \Delta p_e$ [6].

Bagley [1] propune o corecție pentru efectul de intrare, bazată pe o prelungire fictivă a capilarei, așa încît căderea de presiune pe lungimea totală, formată din partea reală și cea imaginară să fie liniară. Tensiunea reală de forfecare la perete τ_p, conform corecției propuse, are forma

$$\tau p = \frac{\Delta p}{2\left(\frac{L}{R} + n_B\right)} \tag{8.3}$$

în care Δp este diferența între presiunea din rezervor și presiunea la ieșirea din tub, R — raza tubului, L — lungimea tubului și n_B — *corecția de capăt*.

Datele experimentale obținute pentru topituri de polimeri cu capilare de diverse geometrii (rapoarte L/R), reprezentate într-o diagramă $\log \tau_p$ — $\log \dot{\gamma}$, vor forma o familie de drepte care au ca parametru L/R, dacă τ_p s-a calculat fără corecția n_B. Introducerea corecției simplifică reprezentarea și se obține o singură dreaptă; proprietățile de curgere devin independente de geometria capilarei.

Corecția n_B se obține dintr-o reprezentare grafică a datelor experimentale: $\Delta p/2$ funcție de raportul L/R. Panta dreptei reprezintă tensiunea de forfecare la perete, iar ordonata la origine produsul $\tau_p \cdot n_B$.

Corecția Bagley n_B, pentru topituri de polimeri, este mult mai extinsă în comparație cu *corecția Couette*. Pierderea de presiune se datorește componentei vîscoase și componentei elastice. La curgerea lichidelor vîscoelastice, energia elastică înmagazinată este parțial disipată în interiorul tubului, pînă la atingerea unei stări staționare, restul fiind complet

Scanned with OKEN Scanner

recuperabilă. Pe baza acestei ipoteze, Philippoff și Gaskins [19] propun pentru corecția Bagley

$$\eta_B = n_c + \frac{\gamma_e}{2} \tag{8.4}$$

în care n_c este corecția Couette, iar γ_e este deformația elastică recuperabilă, egală cu $\gamma_e = \tau_p/G$. Pentru unele materiale între τ_p și n_B nu există proporționalitate directă [8,21], ceea ce pune în discuție relația propusă. Corecția n_B a fost propusă numai pentru efectul de intrare. Han [8,9] a arătat că în realitate ea înglobează ambele efecte de capăt. Cum efectul de ieșire este dependent de raportul L/d, corecția Bagley este mai mare decît suma celor două corecții de capăt (fig. 8.3). Liniei *1*, trasată pentru presiunea de ieșire egală cu zero, îi corespunde.

$$\tau_p = \frac{\Delta p}{2\left(\frac{L}{R} + n_{i_1} + n_{i_2}\right)} \tag{8.5}$$

în care corecțiile n_{i_1} și n_{i_2} rezultă din figură. Corecția făcută profilului real al presiunii (linia *2*) este

$$\tau_p = \frac{\Delta p}{2\left(\frac{L}{R} + n_{i_2} + n_e\right)} \tag{8.6}$$

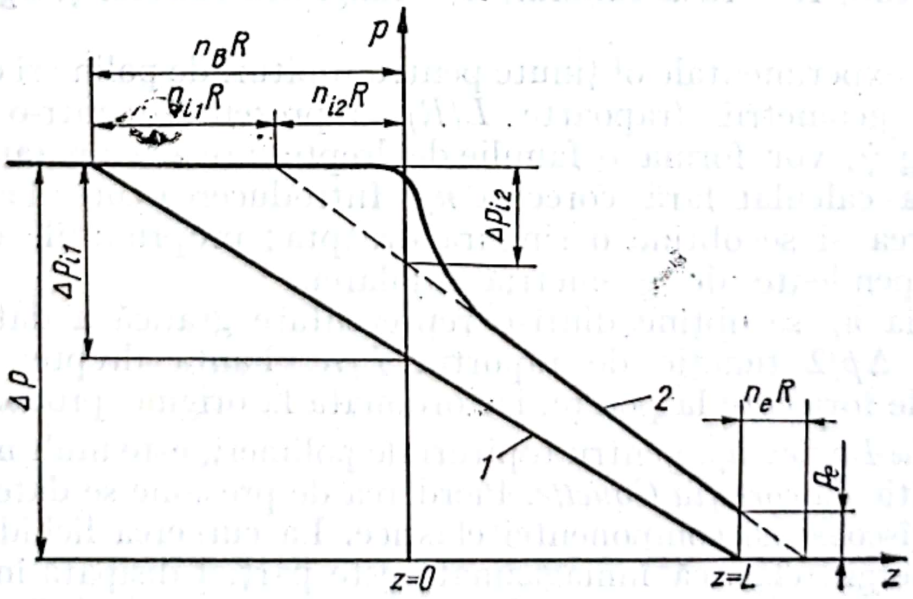


Fig. 8.3. Corecții pentru efecte de capăt la curgerea în capilare.

Scanned with OKEN Scanner

Dacă se ia în considerație că p_e variază cu raportul L/d, este evident că ultimele două relații nu sînt identice, iar lniile *1* și *2* din fig. 8.3, nu sînt paralele. Rezultă relația de ordine

$$n_B = n_{i_1} + n_{i_2} > n_{i_2} + n_e \tag{8.7}$$

din care se constată că

$$n_{i_1} > n_e \tag{8.8}$$

Căderea de presiune Δp la curgerea în capilare a lichidelor vîscoelastice, crește cu raportul L/d, pe cînd presiunea la ieșire p_e, peste o anumită valoare a raportul L/d, rămîne constantă, ceea ce conduce la concluzia că $p_e \ll \Delta p$ și, respectiv [11]

$$n_{i_1} \simeq n_{i_1} \ll n_B \tag{8.9}$$

Presiunea de ieșire p_e este o măsură a deformației recuperabile. Corecția n_e se poate obține funcție de p_e și tensiunea de forfecare la perete τ_p. Din ecuația (8.6) rezultă

$$\Delta p = 2\tau_p (L/R) + 2n_{i2}\tau_p + 2n_e\tau_p$$

și din figura 8.3 se deduce

$$\Delta p = 2\tau_p (L/R) + 2n_{i2}\tau_p + p_e$$

Egalînd ultimele două ecuații, se ajunge la

$$n_e = \frac{p_e}{2\tau_p} \tag{8.10}$$

Presiunea la ieșire p_e crește cu viteza de forfecare și cu creșterea raportului dintre diametrul rezervorului și al capilarei [10—13]. Funcție de raportul L/d, presiunea de ieșire scade tinzînd către o limită. Efectul de umflare a jetului prezintă dependențe similare, ceea ce denotă că ambele sînt manifestări ale componentei elastice.

8.2.2. ZONA CURGERII STABILIZATE

Axa z a sistemului de coordonate cilindrice coincide cu axa de simetrie a tubului, iar coordonata radială este r. Presiunea crește în sensul pozitiv al axei z și curgerea are loc în sens invers, fără alunecare la perete.

Scanned with OKEN Scanner

Componenta z a ecuației de conservare a impulsului (v. tab. 1.9) se simplifică la

$$-\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z}-\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}(r\tau_{rz})=0 \tag{8.11}$$

Gradientul de presiune este independent de coordonata radială și, neglijînd efectul de intrare, presiunea variază liniar în lungul tubului. Ecuația (8.11) se poate scrie, pentru tubul de lungime L

$$\frac{\Delta p}{L}\int_0^r r\,\mathrm{d}r=\int_{\tau_{(r=0)z}}^{\tau_{rz}}\mathrm{d}(r\tau_{rz}) \tag{8.12}$$

Din considerente de simetrie $\tau_{(r=0)z}=0$ și după integrare se obține

$$\tau_{rz}=\frac{r}{2}\frac{\Delta p}{L} \tag{8.13}$$

o relație generală independentă de comportarea reologică a fluidului.

Tensiunea la peretele tubului, $\tau_{rz}=\tau_p$ la $r=R$, rezultă din (8.13)

$$\tau_p=\frac{R}{2}\frac{\Delta p}{L} \tag{8.14}$$

și din ultimele relații rezultă o distribuție liniară a tensiunii de forfecare pe direcție radială

$$\tau_{rz}=\tau_p\frac{r}{R} \tag{8.15}$$

Pentru fluide newtoniene se definește o viteză de forfecare aparentă[7]

$$\dot{\gamma}_{ap}=\frac{4V_s}{\pi R^3}=\frac{8\bar{v}_z}{d} \tag{8.16}$$

în care V_s este debitul volumic, $\bar{v}_z$ — viteza medie a fluidului în tub și d — este diametrul tubului. Debitul volumic rezultă pe baza distribuției vitezelor

$$V_s=2\pi\int_0^r rv_z\,\mathrm{d}r \tag{8.17}$$

sau sub altă formă

$$V=-\pi\int_0^R r^2\left(\frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}r}\right)\mathrm{d}r \tag{8.18}$$

Scanned with OKEN Scanner

Dacă se substituie $-(dv_z/dr) = \dot{\gamma}$ și r din ecuația (8.15), se obține

$$\frac{\tau_p^3 V_s}{\pi R^3} = \int_0^{\tau_p} \dot{\gamma}\, \tau_{rz}^2\, d\tau_{rz} \tag{8.19}$$

După diferențierea ambilor termeni în raport cu τ_p și aplicînd regula lui Leibnitz, rezultă expresia vitezei de forfecare la perete

$$\dot{\gamma}_p = \left(-\frac{dv_z}{dr}\right)_p = \frac{1}{\pi R^3}\left(\tau_p \frac{dV_s}{d\tau_p} + 3V_s\right) \tag{8.20}$$

sau, mai departe, făcînd uz de relația (8.16) se ajunge la ecuația Rabinowitch-Mooney

$$\dot{\gamma}_p = \frac{\dot{\gamma}_{ap}}{4}\left(3 + \frac{d \ln \dot{\gamma}_{ap}}{d \ln \tau_p}\right) \tag{8.21}$$

folosită pentru calculul vitezei reale de forfecare în cazul lichidelor nenewtoniene.

Reprezentarea grafică a tensiunii de forfecare la perete τ_p, funcție de viteza de forfecare aparentă $\dot{\gamma}_{ap}$, în coordonate logaritmice, permite liniarizarea datelor experimentale pe domenii suficient de largi. În ecuația

$$\tau_p = k' \dot{\gamma}^n \tag{8.22}$$

discutată în § 4.2.3.6., n reprezintă panta dreptei

$$n = \frac{d \ln \tau_p}{d \ln \dot{\gamma}} \tag{8.23}$$

Prin substituția expresiei indicelui de curgere n în (8,21), se obține

$$\dot{\gamma}_p = \frac{3n+1}{4n}\dot{\gamma}_{ap} \tag{8.24}$$

Viteza de forfecare aparentă $\dot{\gamma}_{ap}$ se înlocuiește, în continuare, în relația (8.22)

$$\tau_p = k'\left(\frac{4n}{3n+1}\right)^n \dot{\gamma}_p^n \tag{8.25}$$

unde termenul k

$$k'\left(\frac{4n}{3n+1}\right)^n = k \tag{8.26}$$

Scanned with OKEN Scanner

reprezintă un indice de curgere [7]. a cărui expresie este diferită de cea dată de ecuația (4.27) [22].

$$\tau_p = k\dot{\gamma}_p^n \tag{8.27}$$

Legea puterii transcrisă în coordonate cilindrice va avea forma [3]

$$\tau_{rz} = k\left(-\frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}r}\right)^n \tag{8.28}$$

Prin combinarea ecuațiilor (8.15) și (8.28) se obține

$$k\left(-\frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}r}\right)^n = \tau_p \frac{r}{R}$$

După ce se face radicalul de ordinul n din cele două părți, se separă variabilele și se integrează, ținînd cont de condiția $v(R) = 0$, rezultă

$$v_z = \frac{nR}{n+1}\left(\frac{\tau_p}{k}\right)^{1/n}\left[1-\left(\frac{r}{R}\right)^{(n+1)/n}\right] \tag{8.29}$$

Viteza maximă a fluidului se obține la $r = 0$

$$v_0 = \frac{nR}{n+1}\left(\frac{\Delta p}{k}\right)^{1/n} \tag{8.30}$$

și ecuația (8.29) se poate scrie în forma

$$v_z = v_0\left[1-\left(\frac{r}{R}\right)^{(n+1)/n}\right] \tag{8.31}$$

Din ecuațiile (8.29) și (8.31) rezultă pentru $n < 1$ un profil parabolic turtit, iar pentru $n = 1$ se obține profilul parabolic caracteristic fluidelor newtoniene.

Debitul volumic de fluid ce curge prin tub este dat de

$$V_s = \int_0^{2\pi}\int_0^R v_z r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta = 2\pi R^2\int_0^1 v_z \frac{r}{R}\,\mathrm{d}\left(\frac{r}{R}\right) \tag{8.32}$$

Se substituie expresia vitezei [ec. (8.29)] și se integrează

$$V_s = \frac{\pi n R^3}{3n+1}\left(\frac{\tau_p}{k}\right)^{1/n} \tag{8.33}$$

Scanned with OKEN Scanner

sau, folosind relația (8.14) rezultă

$$V_s = \frac{\pi n R^3}{3\,n+1}\left(\frac{R}{2\,k}\,\frac{\Delta p}{L}\right)^{1/n} \tag{8.34}$$

Expresia debitului, pentru $n = 1$ și $k = \eta$, se reduce la cunoscuta ecuație a lui Hagen-Poiseuille.

Viteza medie a fluidului este dată de raportul $V_s/\pi R^2$ și din ecuația (8.33), se obține

$$\bar{v}_z = \frac{nR}{3\,n+1}\left(\frac{\tau_p}{k}\right)^{1/n} \tag{8.35}$$

sau prin combinare cu ecuația (8.30), rezultă

$$\frac{\bar{v}_z}{v_0} = \frac{n+1}{3\,n+1} \tag{8.36}$$

raportul între viteza medie și maximă. Pentru lichide newtoniene $n = 1$ și raportul devine egal cu 1/2.

Distribuția vitezei într-un tub circular este reprezentată în fig.8.4. Funcție de valoarea indicelui de curgere, profilul vitezelor prezintă abateri de la cel parabolic ($n = 1$). Fluidele dilatante ($n > 1$) prezintă un profil parabolic alungit, iar parabola aplatizată ($n < 1$) corespunde comportării pseudoplastice.

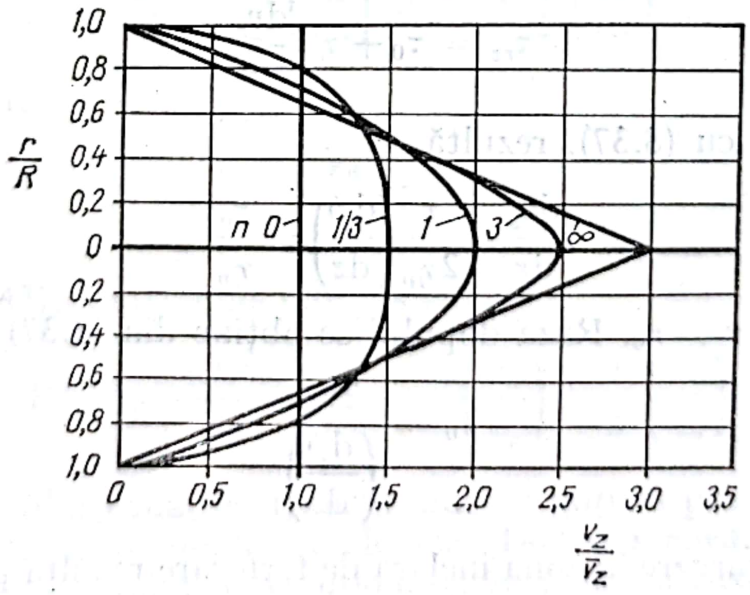


Fig. 8.4. Distribuția vitezelor într-un tub cu secțiune circulară la curgerea laminară a fluidelor ce respectă legea puterii.

Scanned with OKEN Scanner

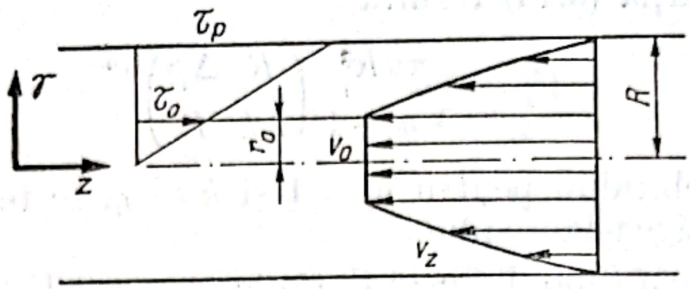


Fig. 8.5. Distribuția vitezelor și tensiunilor la curgerea laminară a plasticului Bingham prin tuburi circulare.

În a doua variantă se consideră un fluid cu comportare de plastic Bingham. Tensiunea de forfecare crește din axul tubului, ajungînd la valoarea maximă τ_p lîngă perete (fig. 8.5). În domeniul $r < r_0$ tensiunea τ_{rz} este mai mică decît pragul de curgere τ_0 și fluidul curge sub formă de piston, cu viteza v_0. În exteriorul dopului central, în secțiunea inelară $r_0 < r < R$ viteza variază radial.

Expresia vitezei locale se obține din ecuația simplificată a transferului de impuls și ecuația reologică a plasticului Bingham. Prin integrarea ecuației impulsului s-a obținut [v.ec. (8.13)]

$$\tau_{rz} = \frac{r}{2}\left(\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z}\right) \tag{8.37}$$

În tabelul 6.1 este dată ecuația reologică

$$\tau_{rz} = \tau_0 + \eta_p \frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}r} \tag{8.38}$$

și prin egalarea cu (8.37), rezultă

$$\frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}r} = \frac{r}{2\eta_p}\left(\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z}\right) - \frac{\tau_0}{\eta_p} \tag{8.39}$$

valabilă pentru $r > r_0$. Raza dopului se obține din (8.37) pentru $r = r_0$

$$r_0 = \frac{2\tau_0}{\left(\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z}\right)} \tag{8.40}$$

Viteza de curgere în zona inelară de forfecare rezultă prin integrarea ecuației (8.39)

$$v_z = -\frac{R^2}{4\eta_p}\left(\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z}\right)\left[1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right] + \frac{R\tau_0}{\eta_p}\left[1 - \frac{r}{R}\right] \tag{8.41}$$

Scanned with OKEN Scanner

Viteza v_0 de deplasare a pistonului central se obține din ultima ecuație pentru $r = r_0$.

Debitul de fluid este dat de suma

$$V_s = \pi r_0^2 v_0 + 2\pi \int_{r_0}^{R} r v_z \, dr \tag{8.42}$$

în care primul termen reprezintă debitul dopului central și al doilea, al zonei inelare. Se substituie vitezele v_z și v_0 și se obține ecuația lui Buckingham

$$V_s = -\frac{\pi R^4}{8\eta_p}\left(\frac{dp}{dz}\right)\left[1 - \frac{4}{3}\left(\frac{r_0}{R}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{r_0}{R}\right)^4\right] \tag{8.43}$$

care pentru $r_0 = 0$ ($r_0 = 0$ pentru $\tau_0 = 0$, comportare newtoniană) se reduce la *ecuația Poiseuille*.

$$V_s = -\frac{\pi R^4}{8\eta_p}\left(\frac{dp}{dz}\right) \tag{8.44}$$

Ecuația lui Buckingham poate fi transcrisă și într-o altă formă, după efectuarea unor substituții.

Din ecuația (8.37) se poate obține

$$\tau_p = \frac{R}{2}\left(\frac{dp}{dz}\right) \text{ și } \tau_0 = \frac{r_0}{2}\left(\frac{dp}{dz}\right) \tag{8.45}$$

iar mai departe

$$\frac{r_0}{R} = \frac{\tau_0}{\tau_p} \tag{8.46}$$

și ecuația (8.43), după înlocuire, devine

$$V_s = -\frac{\pi R^3 \tau_p}{4\eta_p}\left[1 - \frac{4}{3}\left(\frac{\tau_0}{\tau_p}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{\tau_0}{\tau_p}\right)^4\right] \tag{8.47}$$

Tensiunile din ecuațiile transferului de impuls pot fi substituite și cu componentele altor modele reologice. De asemenea, prin alegerea convenabilă a sistemului de coordonate, se poate aborda curgerea prin secțiuni de alte geometrii. În tabelul 8.1 sînt date expresiile debitelor la curgerea prin tuburi circulare și prin fante dreptunghiulare, calculate cu ajutorul a patru modele reologice [3].

Scanned with OKEN Scanner

Tabelul 8.1

Ecuații pentru debite

Modelul	Coeficienți de material	Numărul ecuației în text		Ecuația
Legea puterii	$k,\ n$	(4.3)	Tub	$V_s = \dfrac{\pi R^3 n}{3n+1}\left(\dfrac{\tau_p}{k}\right)^{1/n}$
			Fantă	$V_s = \dfrac{2BH^2 n}{2n+1}\left(\dfrac{\tau_p}{k}\right)^{1/n}$
	$\eta^0,\ \dot\gamma,\ n$	(4.5)	Tub	$V_s = \dfrac{\pi R^3 \tau_p}{\eta^0}\left(\dfrac{n}{3n+1}\right)\left[\left(\dfrac{\eta^0\dot\gamma^0}{\tau_p}\right)^{\frac{n-1}{n}} - \left(\dfrac{n-1}{4n}\right)\left(\dfrac{\eta^0\dot\gamma^0}{\tau_p}\right)^4\right]$
			Fantă	$V_s = \dfrac{2\,BH^2\tau_p}{\eta^0}\left(\dfrac{n}{2n+1}\right)\left[\left(\dfrac{\eta^0\dot\gamma^0}{\tau_p}\right)^{\frac{n-1}{n}} - \left(\dfrac{n-1}{3n}\right)\left(\dfrac{\eta^0\dot\gamma^0}{\tau_p}\right)^3\right]$
Ellis	$\eta^0,\ \tau_{1/2}, n$	(4.18)	Tub	$V_s = \dfrac{\pi R^3\tau_p}{4\eta^0}\left[1+\left(\dfrac{4n}{3n+1}\right)\left(\dfrac{\tau_p}{\tau_{1/2}}\right)^{\frac{1-n}{n}}\right]$
			Fantă	$V_s = \dfrac{2\,BH^2\tau_p}{3\eta^0}\left[1+\left(\dfrac{3n}{2n+1}\right)\left(\dfrac{\tau_p}{\tau_{1/2}}\right)^{\frac{1-n}{n}}\right]$
Eyring	$\tau_c,\ t_c$	(4.13) Formă modificată [63]	Tub	$V_s = \dfrac{2\pi R^3}{t_c}\left(\dfrac{\tau_p}{\tau_c}\right)^3\left\{\left[\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\tau_p}{\tau_c}\right)^2+1\right]\operatorname{ch}\dfrac{\tau_p}{\tau_c} - \dfrac{\tau_p}{\tau_c}\operatorname{sh}\dfrac{\tau_p}{\tau_c} - 1\right\}$
			Fantă	$V_s = \dfrac{2BH^2}{t_c}\left(\dfrac{\tau_c}{\tau_p}\right)^2\left[\dfrac{\tau_p}{\tau_c}\operatorname{ch}\dfrac{\tau_p}{\tau_c} - \operatorname{sh}\dfrac{\tau_p}{\tau_c}\right]$
Bingham	$\eta_p,\ \tau_0$ $\tau_p \geqslant \tau_0$	(6.12)	Tub	$V_s = \dfrac{\pi R^3\tau_p}{4\eta_p}\left[1-\dfrac{4}{3}\left(\dfrac{\tau_0}{\tau_p}\right)+\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{\tau_0}{\tau_p}\right)^4\right]$
			Fantă	$V_s = \dfrac{2\,BH^2\tau_p}{3\eta_p}\left[1-\dfrac{3}{2}\left(\dfrac{\tau_0}{\tau_p}\right)+\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\tau_0}{\tau_p}\right)^3\right]$

* Pentru fantă: B — lățimea, $2H$ — grosimea, L — lungimea și $\tau_p = \Delta p H/L$

Scanned with OKEN Scanner

8.2.3. ZONA DE IEȘIRE

La ieșire din tub, jetul unui fluid vîscoelastic se umflă. Efectul a fost discutat în §5.2.2. Umflarea se datorește componentei elastice, ceea ce a determinat pe numeroși cercetători să o coreleze cu prima diferență a tensiunilor normale. Ecuațiile au fost deduse pe baza bilanțului fluxului de impuls [17] și a recuperării elastice [2, 5, 23]. Bilanțul fluxului de impuls este acceptabil numai la numere Reynolds foarte mari, cînd efectele inerțiale depășesc efectele elastice [16]. Cîteva expresii teoretice, bazate pe ipoteza valabilității legii lui Hooke, au fost obținute de:

— Bagley și Duffey [2]

$$\tau_{11} - \tau_{22} = 2\tau_p \left[\left(\frac{d_j}{d} \right)^4 - \left(\frac{d_j}{d} \right)^{-2} \right]^{1/2} \tag{8.48}$$

— Graessley, Glasscock și Crawley [5]

$$\tau_{11} - \tau_{22} = 2^{1/2}\tau_p \left[\left(\frac{d_j}{d} \right)^4 - \left(\frac{d_j}{d} \right)^{-2} \right]^{1/2} \tag{8.49}$$

— Tanner [23]

$$\tau_{11} - \tau_{22} = 2\tau_p \left[2\left(\frac{d_j}{d} \right)^6 - 2 \right]^{1/2} \tag{8.50}$$

în care d_j este diametrul jetului și d diametrul capilarei. Ultima ecuație, bazată pe o teorie mai riguroasă, merită mai multă atenție.

Măsurătorile experimentale de debit și presiuni, efectuate la curgerea prin capilare sau fante, folosesc la calculul tensiunii și vitezei de forfecare, ca și a celor două diferențe ale tensiunilor normale. În tabelul 8.2 sînt trecute relațiile ce servesc acestui scop. Indicele 1 precizează direcția de curgere (z).

8.3. CURGEREA NEIZOTERMĂ

Printr-un tub circular cu raza R curge un fluid nenewtonian ce respectă legea puterii. Originea sistemului de coordonate cilindrice este în axa de simetrie și curgerea are loc în direcția z. Curgerea este stabilizată. În secțiunea de intrare ($z = 0$), temperatura lichidului T_0 este uniformă. Fluxul termic unitar prin peretele tubului (la $z > 0$) este constant.

Scanned with OKEN Scanner

Tabelul 8.2

Ecuații pentru calculul unor mărimi *)

Mărimea calculată	Expresia	
	Capilare circulare	Fante
$\tau_p =$	$\left(-\frac{\partial p}{\partial z}\right)\frac{R}{2}$	$\left(-\frac{\partial p}{\partial z}\right)H$
$\dot{\gamma}_{ap} =$	$\frac{4V_s}{\pi R^3}$	$\frac{3V}{2BH}$
$n =$	$\mathrm{d}\ln\tau_p/\mathrm{d}\ln\dot{\gamma}_{ap}$	$\mathrm{d}\ln\tau_p/\mathrm{d}\ln\dot{\gamma}_{ap}$
$\dot{\gamma}_p =$	$\left(\frac{3n+1}{4n}\right)\dot{\gamma}_{ap}$	$\left(\frac{2n+1}{3n}\right)\dot{\gamma}_{ap}$
$\tau_{11}-\tau_{22} =$	$p_e + \tau_p(\mathrm{d}p_e/\mathrm{d}\tau_p)$	$p_e + \tau_p(\mathrm{d}p_e/\mathrm{d}\tau_p)$
$\tau_{22}-\tau_{33} =$	$\tau_p(\mathrm{d}p_e/\mathrm{d}\tau_p)$	–

*) R — raza capilarei; B — lățimea fantei; $2H$ — grosimea fantei; V_s — debitul volumic; p_e — presiunea la ieșire

Curgerea neizotermă este descrisă de

— ecuația continuității (în ipoteza unui fluid necompresibil), (v. tab. 1.5)

$$\frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}z} = 0 \tag{8.51}$$

— ecuația transferului de impuls (v. tab. 1.9).

$$-\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z} - \frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}(r\tau_{rz}) = 0 \tag{8.52}$$

— ecuația energiei (v. tab.1.7).

$$\rho c_p v_z \frac{\partial T}{\partial z} = \lambda\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T}{\partial r}\right) + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right] \tag{8.53}$$

Scanned with OKEN Scanner

— ecuația reologică [v.ec. (4.3)].

$$\tau_{rz} = -k\left(\frac{dv}{dr}\right)^n \tag{8.54}$$

În § 8.2.2. din ecuațiile (8.52) și (8.54) s-a obținut expresia vitezei [v.ec.(8.31)]

$$v_z = v_0\left[1 - \left(\frac{r}{R}\right)^{(n+1)/n}\right.$$

ce se poate substitui în ecuația (8.53). Ecuația energiei se mai poate simplifica, întrucît căldura transferată prin conductivitate în direcția z este mult mai mică decît căldura transferată prin convecție, în aceeași direcție.

$$\rho c_p v_0\left[1 + \left(\frac{r}{R}\right)^{(n+1)/n}\right]\frac{\partial T}{\partial z} = \lambda\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T}{\partial r}\right) \tag{8.55}$$

Dependența de temperatură a densității ρ, căldurii specifice c_p și a conductivității termice λ se neglijează.

Este convenabil ca ecuația să fie pusă sub o formă adimensională, cu ajutorul mărimilor [3]

$$\Pi = \frac{T - T_0}{q\dfrac{R}{\lambda}}; \quad \delta = \frac{r}{R}; \quad \zeta = \frac{\lambda}{\rho c_p v_0 R^2} z = \frac{a}{v_0 R^2} z \tag{8.56}$$

în care q este fluxul termic unitar și a difuzivitatea termică. După introducerea termenilor adimensionali, ecuația (8.55) devine

$$(1 + \delta^{n+1/n})\frac{\partial \Pi}{\partial \zeta} = \frac{1}{\delta}\frac{\partial}{\partial \delta}\left(\delta\frac{\partial \Pi}{\partial \delta}\right) \tag{8.57}$$

Pentru rezolvare se impun condițiile de limită

$$\Pi = \text{finit} \quad \text{la} \quad \delta = 0 \tag{8.58}$$

$$-\frac{\partial \Pi}{\partial \delta} = 1 \quad \text{la} \quad \delta = 1 \tag{8.59}$$

$$\Pi = 0 \quad \text{la} \quad \zeta = 0 \tag{8.60}$$

Scanned with OKEN Scanner

Se consideră că la valori mari ale lui ζ, distribuția temperaturilor este de forma

$$\Pi(\delta, \zeta) = C_1\zeta + \psi(\delta) \tag{8.61}$$

Această funcție nu poate satisface toate condițiile de limită. A treia condiție este înlocuită printr-un bilanț global de energie

$$-2\pi Rzq = \int_0^{2\pi}\int_0^R \rho c_p(T - T_0)\, v_z r\, dr\, d\theta \tag{8.62}$$

sau în formă adimensională

$$-\zeta = \int_0^1 \Pi(\delta, \zeta)\,(1 - \delta^{(n+1)/n})\,\delta\, d\delta \tag{8.63}$$

După substituție, din (8.61) se obține ecuația diferențială ordinară

$$\frac{1}{\delta}\frac{d}{d\delta}\left(\delta\frac{d\psi}{d\delta}\right) = C_1(1 - \delta^{(n+1)/n}) \tag{8.64}$$

Se integrează și se substituie în (8.61)

$$\Pi(\delta,\zeta) = c_1\zeta + C_1\left[\frac{1}{4}\delta^2 - \frac{n^2}{(3n+1)^2}\delta^{(3n+1)/n}\right] + C_2\ln\delta + C_3 \tag{8.65}$$

Constantele de integrare se determină din condițiile de limită

$$C_1 = -\frac{2(3n+1)}{n+1} \tag{8.66}$$

$$C_2 = 0 \tag{8.67}$$

$$C_3 = \frac{4n}{n+1}\left[\frac{(3n+1)^3 - 8}{16\, n(3n+1)\,(5n+1)}\right] \tag{8.68}$$

Distribuția temperaturilor la valori mari ale lui z este dată de ecuația

$$\Pi = -\frac{2\,(3n+1)}{n+1}\,\zeta - \frac{2\,(3n+1)}{n+1}\left[\frac{1}{4}\delta^2 - \frac{n^2}{(3n+1)^2}\delta^{(3n+1)/n}\right] + \frac{4n}{n+1}\left[\frac{(3n+1)^3 - 8}{16\, n(3n+1)\,(5n+1)}\right] \tag{8.69}$$

Scanned with OKEN Scanner

Funcție de repartiția temperaturilor în masa fluidului în curgere, se calculează coeficientul individual de transfer de căldură sau numărul adimensional Nusselt. Fluxul termic unitar este definit de relația

$$q = \alpha (T_f - T_p) \tag{8.70}$$

în care T_f și T_p sînt temperaturile locale ale fluidului și, respectiv, ale peretelui. Temperatura locală a fluidului este definită de

$$T_f(z) = \frac{\int_0^{2\pi} \int_0^R v_z(r) T(r, z)\, r\, dr\, d\theta}{\int_0^{2\pi} \int_0^R v_z(r)\, r\, dr\, d\theta} \tag{8.71}$$

Numărul Nusselt este dat de expresia

$$Nu = \frac{2\alpha R}{\lambda} = \frac{2qR}{(T_f - T_p)} \tag{8.72}$$

sau în formă adimensională, ținînd cont de (8.56)

$$Nu = \frac{2}{\Pi_f = \Pi_p} \tag{8.73}$$

Din ecuația (8.69) se obțin Π_f și Π_p și după înlocuire în (8,73), rezultă

$$Nu = 8\, \frac{15n^2 + 8n + 1}{31n^2 + 12n + 1} \tag{8.74}$$

Pentru fluide newtoniene $n = 1$ și $Nu = 48/11$.
În [3] sînt tabelate și alte rezultate obținute pentru numărul Nusselt.

BIBLIOGRAFIE

1. BAGLEY, E. B., In: J. Appl. Phys. 28, p. 624, 1957.
2. BAGLEY, E. B. și DUFFEY, H. J., In: Trans. Soc. Rheol. 14, p. 454, 1970.
3. BIRD, R. B., ARMSTRONG, R. C. și HASSAGER, O., *Dynamics of polymeric liquids*, Vol. 1. Fluid mechanics. New York, John Wiley and Sons, 1977.
4. BLUM, D. B., YERUSHALMI, J. și WILLIAMS, D. J., In: Can. J. Chem. Eng. 50, p. 581, 1972.

Scanned with OKEN Scanner

5. GRAESSLEY, W. W., GLASSCOCK, S. D. și CRAWLEY, R. L., In: Trans. Soc. Rheol. 14, p. 519, 1970.
6. HAN, C. D., In: A.I.Ch. E.J. 17, p. 1480, 1971.
7. HAN, C. D., *Rheology in polymer processing*, New York, Academic Press, 1976.
8. HAN, C. D. și CHARLES, M., In: Trans. Soc. Rheol. 15, p. 371, 1971.
9. HAN, C. D., In: Trans. Soc. Rheol. 17, p. 375, 1973.
10. HAN, C. D., CHARLES, M și PHILIPPOFF, W., In: Trans. Soc. Rheol. 13, p. 453, 1969.
11. HAN, C. D., CHARLES, M și PHILIPPOFF, W., In: Trans. Soc. Rheol. 14, p. 393, 1970.
12. HAN, C. D., YU, T.C. și KIM, K. U., In: J. Appl. Polym. Sci. 15, p. 1149, 1971.
13. HAN, C. D., In: Trans. Soc. Rheol. 18, p. 163, 1974.
14. HAN, C. D. și KIM, K. U., In: Rheol. Acta 11, p. 323, 1972.
15. HAN, C. D., In: Polym. Eng. Sci. 11, p. 05, 1971.
16. HAN, C. D. și KIM, K. U., In: Rheol. Acta 11, p. 313, 1972.
17. METZNER, A. B., HAUGHTON, W. T., SAILOR, R. A. și WHITE, J. L., In: Trans. Soc. Rheol. 5, p. 133, 1961.
18. MORI, Y și FUNATSU, K., In: Chem. High Polym. 25, p. 391, 1968.
19. PHILIPPOFF, W și GASKINS, F. H., In: Trans. Soc. Rheol. 2, p. 263, 1955.
20. SAKIADIS, B. C., In: A. I. Ch. E.J., 8, p. 317, 1962.
[illegible] In: J. Appl. Polym. Sci, 5, p. 175, 1961.

Scanned with OKEN Scanner